目　次

绪　　论

数学是一个完全自成体系的知识领域，也是一个极为宽广的知识领域。我们知道，客观世界的任何事物都存在数量关系和它的空间形式，人类的实践活动需要了解各种事物的数量关系和空间形式，因此，数学的产生和发展，始终都围绕着数和形这两个基本概念不断地深化和演变。大体上说，凡是研究数和它的关系的部分，划为代数学的范畴；凡是研究形和它的关系的部分，划为几何学的范畴。但是数和形并不是互不相关的，而是相互联系的有机整体。十七世纪以后，人们把常数推广到变数，并且出现了解析几何，数学的发展进入了一个新的发展时期。数和形更密切地连在一起，把代数学和几何学沟通了起来，又形成了函数概念和微积分方法，出现了分析数学。可以说，代数学、几何学、分析数学就是近代数学的三大主干。

数学从它的研究对象和方法来说，它是一门高度概括性的科学，具有自己的特征。抽象性是它的第一个特征；数学思维的正确性表现在逻辑的严谨性上，所以精确性是它的第二个特征；应用的广泛性是它的第三个特征。

生产的发展需要数学，同时也推动数学的发展。现代化

大生产和多种多样的科学实验活动，提出了许多新的研究课题，这些课题需要各种学科的共同配合才能解决。不仅是物理学、化学越来越多地需要数学，在生物学以及距离数学更远的社会科学中也广泛地应用数学方法，甚至历史学的研究也在讨论如何运用数学方法的问题，这样就促使数学分成了许多分支。由于各学科之间相互渗透、交叉和综合的趋势，所以又形成了许多外围学科和边缘学科。进入到本世纪，数学家提出了许多精简数学的新观点和新方法，有的人提出以“群”的观点来统一几何学，以“格”的观点来统一代数学；也有人提出以公理系统作为统一数学的基础；以结构概念把数学统一成一个整体，等等。总而言之，数学研究的范围仍在不断地扩大，不断地深入，正蓬蓬勃勃地迅速发展着。

这里简单地谈一点关于数学的发展问题。数学在提出问题和解答问题方面，已经形成了一门特殊的科学，数学的进一步发展，主要产生于解答前人遗留下来的未能解决的问题，以及当前在数学、其他学科、科学技术方面提出的问题。在数学的发展史上，有很多的例子可以说明，数学问题是数学发展的主要源泉。数学工作者为了解答这些问题，要花费较大的力量和时间，尽管对一些问题已经能够解决，还有一些问题仍然没有得到解答，然而在这个过程中，他们创立了不少的新概念、新理论和新方法，往往比问题本身的成果更有价值。

现在许多方面都需要数学工具，这是因为数学的抽象，使外表完全不同的问题之间有了深刻的联系，扩大了数学的用场。近半个世纪以来，数学的成果在数量上有了极为可观的

增长，具有特殊的崭新思想的青年数学家不断出现，研究人员的数字也大大地增加了。历史上积累起来，一代一代传下来的数学，必须更加简化和统一，使数学尽可能多地解释世界和自然规律的纷纭繁杂、千变万化的客观特征。数学科学必将更趋繁荣。

一切科学、技术的发展都需要数学，因此数学又是一门基础学科，它在科学发展中的地位和作用是十分重要的。但是就大多数人来说，数学方面所学到的知识却是很有限的，基本上只学到中世纪以前的数学，对于近世发展起来的现代数学研究得很少，对于本世纪迅速发展起来的各个数学分支更是知道得不多。正是有鉴于此，这一本书想向广大读者介绍数学主要分支的发展情况、研究的主要内容和应用范围，特别是要介绍近代数学各主要分支的一般知识。

在这本书里，几乎找不到数学定理的证明，也没有数学难题。一本数学书里竟然没有这些，这是什么原因呢？道理十分简单，因为本书是为那些需要了解数学的一般知识，或者对数学有兴趣、但是还没有相当的数学修养，或者是没有足够的多余时间去阅读数学专业书籍的广大读者写的。当然，即使是已经学过数学专业书籍的读者，也不妨浏览一下这本书，因为在这本不太厚的书里，包括了绝大部分数学分支的内容、方法、意义、物质基础和发展趋势，也可以从中了解到许多数学分支的知识。如果读者对其中某一部分知识有兴趣，需要更详细地熟悉它们，那么就请另读有关的专门著作，因为本书不是数学的专门论著，更不是数学专业的教科书。

数学从产生、发展到现在，已成为分支众多的学科了。按照数学发展历史的形成和它所研究的对象来区分，有人分成初等数学（研究常量的数学）、高等数学（研究变量的数学）和现代数学（研究各种变化着的量的相互关系和联系的数学）；按照数学本身任务和它的作用来区分，有人分成基础理论数学和应用数学。本书不讨论各种分法，只着眼于把各个主要分支的产生和发展、研究的主要内容的基本概念、应用范围等作一般的介绍。

一　最早的数学——算术

算术的产生和发展

(一)

算术是数学中最基础和最初等的部分，上过小学的人，都学过算术。

"算术"这个词，在我国古代是全部数学的统称。至于几何、代数等许多数学分支学科的名称，都是后来很晚的时候才有的。举例来说，两千多年前，我国有一部十分重要的数学专门著作，全书共分九章：第一章方田，讲分数四则算法和平面形求面积法；第二章粟米，讲粮食交易中的简单比例问题；第三章衰分，讲比例分配问题；第四章少广，讲开平方和开立方问题；第五章商功，讲立体形体积问题；第六章均输，讲比较复杂的算术问题；第七章盈不足，讲盈亏类问题的解法；第八章方程，讲多元一次方程组解法和正负数；第九章勾股，讲勾股定理的运用和有关测量的问题。从内容可以看出，书里不但包含了类似于现在的算术内容，而且还包含了几何知识和初等代数知识，书的名称却叫做《九章算术》。

《九章算术》是什么人编的？编于什么时代？目前都没有

可靠的考证。人们根据书中所举的事例分析，认为许多事例都是汉代初年以前的，因此，有人认为这部书的编写年代应该在汉初以前。这部书可能不是一个人的独创，而是经过历代数学家删改增编而成的。据记载，汉初的张苍（？-前152）和耿寿昌（约前一世纪）都对《九章算术》作过删补增订的工作。这也说明，“算术”这个词，至迟在两千年前就作为全部数学的名称而通用了。

在国外，系统地整理前人数学知识的书，要算是希腊的欧几里得（约前330-前275）的《几何原本》最早。《几何原本》全书共十五卷，后两卷是后人增补的。全书中大部分是属于几何的知识，在第七、八、九卷中专门讨论数的性质和运算，属于算术的内容。现在拉丁文的“算术”这个词是 arithmetica，它就是由希腊文的“数和数（音署，shǔ）数的技术”变化而来的。

（二）

关于算术的产生，还是要从数谈起。数是用来表达、讨论数量问题的，有各种不同类型的量，也就随着产生了各种不同类型的数。远在古代文化发展的最初阶段，由于计算事物的个数的需要，就产生了最简单的自然数的概念，如1，2，3，4，5，……。

自然数的一个特点是由不可分割的个体组成的。比如我们说树和羊这两种事物，如果说有两棵树，就是一棵树又一棵树；如果说有三只羊，就是一只羊一只羊地数个数，共三只。但是不能说有半棵树或者半只羊，半棵树或者半只羊充其量只

能算是木材或者羊肉，而不能算作树或者羊。同样地，把自然数“1”一分为二，或者再分成更多的部分，那就不再是自然数，而是分数了。分数是对另一种类型的量的分割而产生的，比如，长度就是一种可以无限地分割的量，要表示这些量，只有自然数是不够用的，这样就产生了分数。

自然数和分数都具有不同的性质，数和数之间也有不同的关系，计算这些数，就产生了加、减、乘、除的方法，这四种方法叫做四则运算。

把数和数的性质、数和数之间的四则运算在应用过程中的经验积累起来，并加以整理，就形成了最古老的一门数学，这就是算术。

(三)

在算术的发展过程中，由于实践和理论上的要求，提出了许多新问题，在解决这些新问题的过程中，古算术从两个方面得到了进一步的发展。

一方面，在研究自然数四则运算中，发现只有除法比较复杂。有的能够除尽，有的除不尽，有的数可以分解，有的数不能分解，有些数有大于1的公约数，有些数没有大于1的公约数。为了寻求这些数的规律，从而发展成为专门研究数的性质、脱离了古算术而独立的一个数学分支，叫做整数论，或叫做初等数论，并在以后又有新的发展。在本书中的“数论”部分，我们将另加介绍。

另一方面，在古算术中也讨论各种类型的应用问题，以及对这些问题的各种解法。在长期的研究中，很自然地就会启

发人们寻求解这些应用问题的一般方法。也就是说，能不能找到一般的更为普遍适用的方法来解同类型的应用问题，于是发明了抽象的数学符号，从而发展成为数学的另一个古老的分支，就是初等代数。

关于算术的内容

(一)

数学发展到现代，算术不再是数学的一个分支，通常提到算术，只是作为小学里的一个教学科目。小学里设这门课的目的是要使学生理解和掌握数量关系和空间形式的最基础的知识，能够正确地、迅速地进行整数、小数和分数的四则运算，初步了解现代数学中的某些最简单的思想，具有初步的逻辑思维能力和空间观念，并能够运用所学的知识解决日常生活和生产中的简单的实际问题。同时，在我们的学校里，结合数学教学内容对学生进行思想政治教育。

我们在这里把算术列成第一个分支，主要是想强调在古代全部数学就叫做算术，现代的代数学、数论等最初就是由算术发展起来的。后来，算学、数学的概念出现了，它代替了原来算术的含义，包括了全部数学，算术就变成一个分支了。因此，也可以说算术是数学最古老的分支。

(二)

现代小学数学的具体内容，基本上还是古代算术的知识，仍然是自然数、分数和小数的性质和四则运算。也就是说，古代算术和现代算术的许多内容大体上是相同的。对于现代小

学里的算术，许多读者都学习过也都十分熟悉，这里就不再作介绍了。

现代算术和古代算术也还存在着区别，它们的不同点，可以提出以下几个方面：

首先，算术的内容是古代的成人包括数学家所研究的对象，现在这些内容已变成了少年儿童的数学。

其次，在现代小学数学里，总结了长期以来所归结出来的基本运算性质，就是加法、乘法的交换律和结合律，以及乘法对加法的分配律，这五条基本运算定律，不仅是小学数学里所学习的数的运算的重要性质，也是整个数学里，特别是代数学里着重研究的主要性质。

第三，在现代的小学数学里，还孕育着近代数学里的集合和函数① 等数学基础概念的思想。比如，和、差、积、商的变化，数和数之间的对应关系，以及比和比例等。

第四，现在小学数学里，还包含有十六世纪才出现的十进小数和它们的四则运算。应当提出的是十进小数不是一种新的数，小数被看作是一种特殊的分数，就是分母是 10 的方幂的分数的另一种写法，比如，0.3 就是$\frac{3}{10}$，1.24 就是$\frac{124}{10^2}$，0.001就是$\frac{1}{10^3}$等。

---

① 集合和函数的解释详见本书三、七两章。

二　初等代数

“代数”的由来

（一）

在算术里积累了大量的各种数量问题的解法以后，为了寻求有系统的、更普遍的方法解决各种数量关系的问题，于是产生了以解方程的原理为中心的初等代数。

那么，什么是代数？代数这个名称是谁最先提出和使用的？代数又包含哪些内容呢？

这些问题似乎很简单，许多人都能作出回答。所谓代数，顾名思义就是指用符号来代表数字进行计算的一种数学方法。

“代数”这个词，作为一个数学专有名词、代表一门数学分支在我国正式使用，最早是在1859年。那年，清代数学家李善兰(1811-1882)和英国人伟烈亚力(1815-1887)共同翻译了英国人棣么甘（1806-1871）所写的一本书，译本的名称叫做《代数学》，代数的名称就从此开始使用了。当然，代数的内容和方法，我国古代早就产生了。比如，《九章算术》中就有方程问题，那就是代数学的内容。这里所讲的意思只是说“代数”

这个名称在我国使用比较晚。

"代数学"在拉丁文中是 algebra，它是由阿拉伯文翻译过来的。说来有趣，这里还有一段曲折的历史哩！

大约在九世纪，有一个花剌子模(现在的中亚细亚乌兹别克境内)人，叫做穆罕默德·伊本·穆斯·阿尔·花剌子模(原意是花剌子模人的儿子穆罕默德)，是一个数学家和天文学家，写了一本书，书名是"'ilm al—Jabr w'al muqabala"原意是"还原(或移项)和取消(或对消)的科学"。由阿拉伯文译成拉丁文的时候，"al—Jabr"变成了"algebra"，后面的"w'al muqabala"又被人忘记了。传来传去，最后就剩下现在的"algebra"。在拉丁文中，"algebra"的原意也可解释成"方程的科学"。李善兰和伟烈亚力翻译的时候，把它译成"代数学"，从那时候起，"algebra"在中文里就是"代数学"了。

(二)

代数是由算术发展演变而来，这是毫无疑问的。至于什么年代产生代数学这门分支，那就很不容易说清楚了。一方面是可供考证的史料不足；另一方面是代数学这个术语的涵义不同，产生的年代也就不同。

为什么代数涵义不同就会有不同的产生年代呢？举例来说，如果你提出的"代数学"是指的解 $ax^2+bx+c=0$ 这类用符号表示的方程的技巧，那么，这种代数学是在十六世纪才发展起来的。

如果我们对代数符号不是要求象现在这样简练，那么，代数学的产生还可以上溯到更早的年代。西方人一直把希腊数

学家刁藩都(约三世纪)看作是代数学的鼻祖，认为他是最早使用记号来表示未知数的人。其实，我国比刁藩都生活年代更早得多的年代，就有了用文字来表达的代数，西方人把这种方法叫做“修辞的”和位置的代数学。前面讲过，《九章算术》的第八章“方程”，就讲述了正数和负数，讲述了多元一次方程组的解法，这些和现代的初等代数的内容是相同的，不过当时没有使用符号来表示就是了。

初等代数的内容和方法

(一)

初等代数的中心内容是解方程，因而长期以来都把代数学理解成解方程的科学，数学家们也把主要精力集中在方程的研究上。

要讨论方程，首先遇到的一个问题是如何把实际中的数量关系组成代数式，然后根据等量关系列出方程。所以初等代数的又一个重要内容就是代数式。由于事物中的数量关系的不同，大体上说来，初等代数形成了整式、分式和根式这三大类代数式。这些代数式是数的概念的化身，因而在代数中，它们都可以进行四则运算，并且服从基本运算定律，而且还可以进行乘方和开方两种新的运算。通常把这六种运算叫做代数运算，以区别于只包含四种运算的算术运算。

我们知道，方程是一个等式，所以解方程就离不开等式的基本性质。第一个性质是等式的两边同时加(或减)同一个数，仍然相等。第二个性质是等式的两边同时乘(或除)一个

不等于零的数，仍然相等。解方程的时候，除了应用这两个等式的基本性质以外，有时还需要在等式两边进行运算，就要用到五条基本运算定律。如果是高次方程，还得用到三条指数的运算性质或者叫做指数律，就是

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

$$(a^m)^n = a^{mn},$$

$$(ab)^n = a^n b^n, \qquad (a, b \neq 0)$$

其中 m、n 可以是任意整数或分数，就是有理数。

（二）

在初等代数的产生和发展的过程中，通过对解方程的研究，也促进了数的概念的进一步发展。因为只有算术里所讨论的整数和分数，那么象

$$x + 2 = 0 \qquad (1)$$

这样十分简单的方程也没有解。很明显，(1)的解是 $x = -2$，而 -2 不属于算术里所研究的数的范围。或者说，如果你只认识算术里的数，当你看到 -2 这个数的时候，就会少见多怪。所以需要把数的概念扩充到有理数，使数包括正、负整数、正负分数和零（不属于正数也不属于负数的中性数）。这是初等代数的又一重要内容，就是数的概念的扩充。

有了有理数，方程(1)就可以求解了。但是象下面的方程

$$x^2 - 2 = 0 \qquad (2)$$

在有理数范围内仍然没有解。在初等代数中，数的概念再一次扩充到实数，包括全体有理数和无理数。这时候，方程(2)在实数范围内就有解，$x = \pm\sqrt{2}$。为了使方程

$$x^2 + 2 = 0 \quad (3)$$

也有解，数的概念又扩充到复数，就是 $a+bi$ 形式的数。其中 a、b 是任意实数，a 叫做实数部分，当 $b\neq0$ 的时候，bi 叫做虚数部分，b 叫做虚数部分的系数，i 叫做虚数单位：$i^2=-1$。也就是说复数包括全体实数和虚数。有了复数的概念，方程(3)就有解 $x=\pm\sqrt{2}i$。

（三）

现在接着上面所说的，继续提出这样一个问题，在复数范围内是不是仍然有的方程没有解，还必须把复数再进行扩充呢？

我们说，不会有这种情况，任何代数方程在复数范围总是有解的。这就是代数里的一个著名的定理，叫做代数基本定理所保证的。这个定理简单地说就是 n 次方程有 n 个根。1742 年 12 月 15 日瑞士数学家欧勒（1707－1783）曾在一封信中明确地作了陈述，后来另一个数学家、德国的高斯（1777－1855）也给出了严格的证明。据说“代数基本定理”这一名称可能就是高斯提出来的。

按照“代数基本定理”从解方程这个意义来说，数的概念扩充到复数就够用了。

现在把上面分析过的内容综合起来，组成初等代数的基本内容就是：三种数——有理数（包括整数）、实数和复数；三种式——整式、分式和根式；中心内容是方程——整式方程、分式方程、根式（或叫做无理）方程和方程组（包括二元一次方程组、三元一次方程组和二元二次方程组）。

关于现代的初等代数

(一)

初等代数的内容和方法，许多读者在中学里都学习过，和算术的情况一样，这里不再单独介绍，作为本章的结束，仅提出下面三点以供参考。

第一，初等代数的内容大体上相当于现代中学设置的代数课程的内容，但是又不完全相同。这就是说，中学代数课程里包含着从纯代数观念来看不属于代数学的内容。比如，严格地说，数的概念、排列和组合应归入算术的范围；函数应该是分析数学[①]的内容；不等式的解法有点象解方程的方法，但是不等式作为一种估算数值的工具，本质上是属于分析数学的范围；坐标法是研究解析几何学的工具，等等。凡是不属于几何学课程内容的，现在都归并入代数学课程，这种传统的编排方法，完全是历史上形成的。

第二，初等代数是算术的继续和推广。概括地说，初等代数研究的对象是代数式的运算和方程的求解。代数运算包括加法、乘法、乘方，以及它们的逆运算：减法、除法、开方。这些运算施行于数和字母上，这里的字母都代表有理数或者实数或者复数。以上这些运算，实质上就是用来解决方程的问题。代数运算的特点是只进行有限次的运算。它们都适合下面五

① 分析数学是数学的一个重要的部门，以函数作为研究对象，包括许多分支，如微积分学、实变函数论、复变函数论、泛函分析等。各分支情况，详见后面各章。

条基本运算定律：

$$a+b=b+a, \qquad \text{(加法交换律)}$$

$$(a+b)+c=a+(b+c), \qquad \text{(加法结合律)}$$

$$ab=ba, \qquad \text{(乘法交换律)}$$

$$(ab)c=a(bc), \qquad \text{(乘法结合律)}$$

$$a(b+c)=ab+ac。 \qquad \text{(分配律)}$$

也适合三条指数律：

$$a^m \cdot a^n=a^{m+n},$$

$$(a^m)^n=a^{mn},$$

$$(ab)^n=a^n b^n。$$

如果再添上两条等式的基本性质：

如果 $a=b$，那么 $a+c=b+c$；

如果 $a=b$，那么 $ac=bc$。$(c\neq 0)$

那么，全部初等代数总起来就有十条规则。这是学习初等代数需要理解并掌握的要点。

第三，初等代数或者中学代数课程的中心内容，都是关于解方程的问题，学过中学代数的人应该记得，方程的研究是从一个只含一个未知数的一次方程开始的，然后从两方面去发展。一方面，讨论含有两个未知数的两个一次方程组成的方程组，以及含有三个未知数的三个一次方程组成的方程组；另一方面，研究一个只含一个未知数的二次方程，以及可以化成二次方程的特殊类型的高次方程。解前一类的方程组的基本思想是“消元”，就是把三个未知数的化成两个未知数的，再把两个未知数的化成只含一个未知数的一元一次方程。解后一

类的高次方程的基本思想是"降次"，就是把例如三次方程化成二次方程，再把二次方程化成一次方程。这两个发展方向的进一步发展，就是未知数更多的一次方程组和未知数的次数更高的高次方程的研究，这时候，代数学已由初等代数向着高等代数的方向发展了。

三　高等代数

什么是高等代数？

（一）

前面提到，初等代数从最简单的一元一次方程开始，一方面进而讨论二元及三元的一次方程组，另一方面研究二次以及可以化成二次的方程。沿着这两个方向继续发展，代数讨论任意多个未知数的一次方程组，一次方程组也叫做线性方程组；同时研究次数更高的一元方程。发展到这个阶段的代数，叫做高等代数。

高等代数是代数学发展到高级阶段的总称，它包括许多分支部门。现在，高等代数也作为一门基础课在大学阶段开设，大学里开设的高等代数，一般包括两大部分，一部分叫做线性代数初步，一部分叫做多项式代数。

（二）

高等代数在初等代数的基础上研究对象进一步扩充，引进了和通常的数很不相同的量，这些量具有和数相类似的运算的特点；研究的和运算的方法都更加繁复。

高等代数引进了许多新的概念，有一些将在后面叙述的

时候，给予必要的介绍。这里简单地介绍几个最基本的概念。

集合也叫做集。具有某种属性的事物的全体叫做集合。组成集合的每个事物叫做这个集合的元素。现在习惯上一般都用英文大写字母 A、B、C 等来分别表示某一个集合，用小写字母 a、b、c 等来分别表示某个集合中的某个元素，并且用记号"$\in$"(读作"属于")和记号"$\notin$"(读作"不属于")来表示元素跟集合的关系。比如，如果 a 是集合 A 的元素，就说 a 属于 A，记成 $a\in A$；如果 b 不是集合 B 的元素，就说 b 不属于 B，记成 $b\notin B$。

向量也叫做矢量，具体地说，除了数值还具有方向的量叫做向量。比如，一个有方向的直线段就是向量。向量通常用 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 等来表示。向量 $\vec{a}$ 的数值的绝对值叫向量 $\vec{a}$ 的模或者长，记成 $|\vec{a}|$。$\vec{a^0}$ 表示 $\vec{a}$ 的单位向量，也就是 $|\vec{a^0}|=1$。如果向量的模等于零，这个向量叫做零向量。向量还有分量，比如，平面上的一个点由两个有次序的实数(x,y)来确定，空间上的一个点由三个有次序的实数(x,y,z)来确定，那么，有序实数集合(x,y)、$(x、y、z)$等叫做向量，每个向量中的实数就叫做向量的分量。

向量空间也叫做线性空间，这是高等代数中的一个基本概念。由许多向量组成一个集合，对集合中的元素都规定了运算的规则，这样的集合就叫做向量空间。应当注意的是在向量空间中，运算的对象已经不只是数，而是向量，因此，关于数的运算性质，部分地保持有效，而主要的部分却是不同的。

(三)

代数学的发展历史告诉我们，在研究高次方程的求解问题上，许多数学家走过了一段颇不平坦的路途，付出了艰辛的劳动，为代数学的发展作出了贡献。

我们都知道，如果方程是一次的，它的形式是

$$ax+b=0, \qquad (a\neq 0)$$

那么，它的解就是

$$x=-\frac{b}{a}。$$

对于任意系数的一元二次方程：

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

的解的公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

关于三次方程，我国在七世纪，得到了一般的近似解法，这点在唐朝数学家王孝通所编的《缉古算经》中就有叙述。到了十三世纪，宋代数学家秦九韶(1202-1261)在他所著的《数书九章》这部书的“正负开方术”里，充分研究了数字高次方程的求正根法，也就是说，秦九韶那时候已得到了高次方程的一般解法。但是，在西方，直到十六世纪初文艺复兴时代，意大利的数学家才发现了三次方程：

$$x^3+px+q=0$$

的解的公式，这个公式通常叫做卡当公式，就是

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

在数学史上，据传这个公式是意大利数学家塔他里亚(1500-1557)首先得到的。塔他里亚是一个自学成材的数学家、工程师、会计师。他写过不少关于数学、筑城术、火药制法、商业算术等著作。塔他里亚原名是冯塔那，他幼年时代正碰上意、法两国发生战争，他的家乡被法军占领，他的脸部被法军用军刀砍伤，伤愈后，语言失灵，说起话来有些口吃，别人就给他起了一个绰号叫做"塔他里亚"，意大利语的意思是"口吃者"。

1535年2月22日，他在米兰和别人竞赛解三次方程的题目，竞赛双方各出30道题目给对方做，谁解得最多最快，谁就获胜。竞赛开始后，两小时之内，塔他里亚解完了所有30道题，对方却一道也没有解出来。获胜后，塔他里亚经过进一步探索，终于找到了三次方程的一般解法。他的解法一直保密不肯公布出来。后来，意大利米兰地区的数学家卡当(1501-1576)得知塔他里亚研究并得到了这个三次方程的解的公式，就写信给塔他里亚，央求把这个公式告诉他。塔他里亚在卡当的再三央求下，提出要卡当绝对保守秘密，卡当答应了这个条件，塔他里亚把公式告诉了卡当。但是，后来卡当违背了自己的诺言，把这个公式发表在他自己的著作里。所以直到现在，人们还是把这个公式叫做卡当公式，其实，它应该叫做塔他里亚公式。

三次方程被解出后，一般的四次方程很快就被意大利的弗拉利(1522-1560)解出。这就很自然地促使数学家们继续努力寻求五次以及五次以上的高次方程的解的公式。遗憾的

是这个问题虽然耗费了许多数学家的时间和精力，一直持续了长达三个世纪，都没有得到解决。

到了十九世纪初，挪威的一位青年数学家阿贝尔（1802-1829）证明了五次或五次以上的方程不可能有代数解。阿贝尔的这个断言并不是说这样的方程没有解，而是说五次或五次以上的方程的解，不可能象一次、二次、三次方程的解那样，用方程的系数通过加、减、乘、除、乘方、开方这些代数运算表示出来。稍为具体的说法是，如果一个方程的次数 $n\geqslant5$ 的时候，那么，由这个方程各项的系数 $a_1, a_2, a_3, \cdots a_n$ 组成的根式不可能是这个方程的根。

阿贝尔的这个证明不但比较难，而且也还没有回答每一个具体的方程是否可以用代数方法求解的问题。

后来，五次或五次以上的方程不可能有代数解的问题，由法国的一位青年数学家伽罗华（1811-1832）彻底地解决了。伽罗华20岁的时候，因为积极参加法国资产阶级革命活动，曾两次被捕入狱，1832年4月，他出狱不久，便在一次私人决斗中死去，死的时候才21岁。临死前他预料自己难以摆脱死亡的命运，所以曾连夜给朋友写信，仓促地把自己生平的数学研究心得扼要写出，并附以论文的手稿。他在给他的朋友舍瓦利叶的信中说道："我在分析方面作出一些新发现。有些是关于方程论的。有些是整函数的。……公开请求雅可比（1804-1851）或高斯，不是对于这些定理的正确性而是对于它的重要性发表意见。其次，我希望将来有人发现消除所有这些混乱对他们是有益的。"伽罗华死后，按照他的遗愿，舍瓦利

叶把他的信发表在《百科评论》中。他的论文手稿过了14年，才由刘维尔(1809-1882)主办的刊物《纯粹与应用数学杂志》给予发表，题目是《关于方程用根号解的条件的记录》(也有的书译作"论方程的根式可解性条件")，刘维尔并作序向数学界推荐。

伽罗华虽然十分年轻，但是他在数学史上作出的贡献，不仅解决了几个世纪以来一直没有解决的高次方程的代数解的问题，更重要的是他在解决这个问题的过程中引入了一个"群"的概念，开辟了代数学的一个崭新的领域，直接影响着代数学研究方法的变革。从此，代数学不再以方程理论为中心内容，转向代数结构的性质的研究，促进了代数学进一步的新发展。

(四)

五次或者五次以上的高次方程不能用代数解，但是在力学、物理学和科学技术部门中的许多问题却常常要求出高次方程的解。而且从实用上来看，即使象三次方程有解的公式，由于形式繁杂，实用价值也不大。于是数学家转而考虑高次代数方程的近似解。在这方面得到了许多高次方程的数值解法，现在是属于计算数学这一分支的。常用的有瑞士数学家斯图姆(1803-1885)提出的斯图姆方法，我国数学家秦九韶提出的秦九韶方法，俄国数学家罗巴切夫斯基(1793-1856)提出的罗巴切夫斯基方法。

斯图姆方法可以确定高次方程的解的个数，还可以确定每个解所在的区间，从而可以计算出所有的解。

秦九韶方法在国外叫做霍纳(1786-1831)方法，或者叫做霍纳-鲁非尼(1765-1822)方法。霍纳是英国人，1819年，他在英国皇家学会宣读了他的论文《用连续逼近法解所有阶的数字方程的新方法》，他的这个方法，鲁非尼早在1804年就得到了，但是没有公开发表，所以后来有人只把它叫做霍纳方法。其实，霍纳方法和我国的秦九韶方法完全一样，秦九韶在1247年他所著的《数书九章》中，已经发表了这个算法，比霍纳要早五百多年。

罗巴切夫斯基方法可以直接求出所有解的近似值，包括复数解，而且不需要事先把解区分出来，但是需要进行很复杂的计算。

关于上述几种方法，有兴趣的读者可参阅有关书籍，这里就不具体介绍了。

多项式代数

(一)

多项式是一类最常见、最简单的函数，它的应用非常广泛。多项式理论是以代数方程的根的计算和分布作为中心的，所以也叫做方程式论。关于多项式的一些重要定理和方法，不仅在解决实际问题的时候常常会用到，而且在进一步学习代数以及其他学科的时候，也经常会碰到。

关于多项式的基本概念，可以这样叙述：设 x 是一个变量，n 是一个非负整数。象下面这样的表示式：

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0 \tag{1}$$

叫做 x 的一个多项式。式子中的 a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 都是常数，叫做多项式(1)的系数；$a_n x^n$ 叫做多项式(1)的 n 次项；a_n 叫做 n 次项的系数。因为象(1)式这样的多项式只包含一个变量，所以叫做一元多项式。如果(1)式中的系数 a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 都是整数或者有理数，那么，(1)式就叫做整系数或者有理系数多项式。

多项式常用 $f(x)$、$g(x)$、$F(x)$、……等来表示，如：

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0。$$

有时候甚至简单地用 f、g、F、……等来表示。并且用 $f(a)$、$f(b)$ 表示多项式 $f(x)$ 当 $x=a$、$x=b$ 时候的值。如果 $f(c)=0$，就把 c 叫做多项式 $f(x)$ 的一个根或者零点。

如果两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的同次项的系数全相等，就说 $f(x)$ 和 $g(x)$ 相等，记作 $f(x)=g(x)$。

(二)

研究多项式理论，主要在于探讨代数方程的性质，从而寻求简易的解代数方程的方法。两个多项式相除的结果不一定是多项式，这点说明多项式的除法显得特别重要。比如有两个多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$，如果有另外一个多项式 $q(x)$，使得

$$f(x)=q(x)g(x),$$

就说 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除（或者除尽）。这种情况下，通常把 $f(x)$ 叫做 $g(x)$ 的一个倍式；把 $g(x)$ 叫做 $f(x)$ 的一个因式。

现在一般都用“$g(x)|f(x)$”来表示 $g(x)$ 能整除（或者除尽）$f(x)$，用“$g(x)\nmid f(x)$”来表示 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$。

多项式的整除性质对于解代数方程是很有用处的。解代

数方程，无非是求对应的多项式的零点，零点不存在的时候，对应的代数方程就没有解。

(三)

多项式代数所研究的内容，包括整除性理论、最大公因式、因式分解定理、重因式等等。这些内容大体上和中学代数里的内容相同，下面简单介绍关于最大公因式和重因式这两个概念。

我们已经知道如果多项式 $q(x)$ 既是 $f(x)$ 的因式，又是 $h(x)$ 的因式，那么 $q(x)$ 就叫做 $f(x)$ 和 $h(x)$ 的一个公因式。

假设 $F(x)$ 和 $q(x)$ 是两个多项式，如果有一个多项式 $d(x)$ 满足下面两个条件：

第一、$d(x)$ 是 $F(x)$ 和 $q(x)$ 的公因式；

第二、$F(x)$ 和 $q(x)$ 的任何公因式都是 $d(x)$ 的因式。

这样就把 $d(x)$ 叫做 $F(x)$ 和 $q(x)$ 的一个最大公因式。

最大公因式有一个很重要的性质，也是多项式的定理之一：假设 $d(x)$ 是多项式 $F(x)$ 和 $q(x)$ 的一个最大公因式，那么，$d(x)$ 一定可以表示成 $F(x)$ 和 $q(x)$ 的组合，也就是说可以找到多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$，使得

$$d(x)=u(x)F(x)+v(x)q(x)。$$

任意一个多项式 $f(x)$ 总有以下两类明显的因式：非零常数 c 以及 $f(x)$ 的非零常数倍 $cf(x)$。如果除此以外不再有其他因式，那么，这样的多项式就叫做不可约的；不然的话，就叫做是可约的。

现在，我们假设多项式 $p(x)$ 是不可约的，$p^k(x)\,|\,f(x)$，

而$p^{k+1}(x)\nmid f(x)$，如果 $k=0$，那么 $p(x)$根本不是 $f(x)$ 的因式；如果 $k=1$，那么 $p(x)$叫做 $f(x)$的单因式；如果 $k>1$，那么 $p(x)$叫做$f(x)$的重因式。

多项式还有许多重要的定理和方法，读者可以参阅有关高等代数的教科书。

线性代数初步

（一）

我们知道一次方程叫做线性方程，讨论线性方程的代数，就叫做线性代数。在线性代数初步中，最重要的内容是行列式和矩阵。

如果我们要解 n(n 是自然数）个未知数的 n 个线性方程组成的方程组，方程组的解仅仅和未知数的系数有关，而和未知数本身所代表的事物并没有关系。举例来说，在方程 $3x=24$ 中，它的解 $x=8$。当 x 表示购买水果的斤数的时候，每斤水果 3 角，那么 2 元 4 角就可以买水果 8 斤；如果仍旧用这个方程来求买 3 角 1 尺的布，那么 2 元 4 角就可以买布 8 尺。也就是说，未知数 x 既可以表示水果的斤数，也可以表示布的尺数，或者表示其他的事物。但是 $x=8$ 和水果、布等这些具体事物是没有关系的，它完全由系数 3 和 24 决定。因此，在解方程组

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2,$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3$$

的时候，我们无需去考虑未知数 x、y 和 z，而只注意它们的系数。可以把这些系数从方程组中按原来的次序分离出来，组成一个数表(或叫做式子)，这个数表叫做行列式。如

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

就是一个行列式。为什么叫做行列式呢？请看它的横排各有3个数，叫做行；竖排也各有3个数，叫做列；行列式就由此得名。象这样具有3行3列的行列式，叫做三阶行列式；如果有8行8列的就叫做八阶行列式；一般地有 n 行 n 列的，就叫做 n 阶行列式。

行列式的概念最早是由十七世纪日本数学家关孝和(1642-1708)提出来的，他在1683年写了一部叫做《解伏题之法》的著作，标题的意思是“解行列式问题的方法”，书里对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述。欧洲第一个提出行列式的是德国的数学家莱布尼茨(1646-1716)，莱布尼茨1693年才提出。虽然也是各自提出的，但是时间上却有先有后。十九世纪，德国数学家雅可比于1841年总结并提出了行列式的系统理论。

行列式有一定的计算规则，利用行列式可以把一个线性方程组的解表示成公式，因此行列式是解线性方程组的工具。但是在应用上，有它的局限性，当线性方程组中未知数的个数多于或少于方程的个数的时候，行列式这个工具就不适用了。

行列式可以把一个线性方程组的解表示成公式，也就是说行列式代表着一个数。比如，前面所举的行列式就可以表示成

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2。$$

把 a、b、c 的具体数代入公式，就可以算出得数，这个数就是行列式所代表的数。

（二）

因为行列式要求行数等于列数，排成的数表总是正方形的，研究它的特点，又发现了矩阵的理论。矩阵也是一些数排成行和列的数表，如果行和列相等的，这种数表就是正方形的，可以叫做方阵；如果行数和列数不等，数表就是长方形的，有的甚至可以只有一行多列，或者是多行一列，统一的叫做矩阵。

矩阵和行列式是两个完全不同的概念。在形式上，行列式左右两边用竖线相围，矩阵的两边却是用弧线相围，如上面的三阶行列式中的九个数表示成矩阵，就变成下面这种形式了：

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}。$$

更为重要的不同点是：行列式代表着一个数，矩阵仅仅是一些

数的有顺序的摆法。举例来说：因为行列式代表一个数，所以虽然几个行列式的某行某些元素不同，这几个行列式却可能是相等的，如

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

因为根据行列式的运算规则，有

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times 3 = 1,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1.$$

两个行列式虽然某行某列的某些元素不同，但它们都代表1这个数，所以两个行列式是相等的。作为矩阵来说，就会是

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}。$$

如果两个矩阵的行数和列数分别相等，可以相加，一个矩阵可以用一个数去乘，两个矩阵也可以相乘，也就是说，两个矩阵可以进行运算。应用矩阵的理论，前面的线性方程组可以写成

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

由矩阵的运算规则，可以求出这个线性方程组的解。假设A、X、D分别表示这个线性方程组中的三个矩阵，那么，这个线

性方程组可以简单地写成

$$AX=D。$$

可以看出，有了矩阵的理论，可以把一个看来很复杂的方程组归结成一个最简单的一元一次方程来处理。

矩阵的应用是多方面的，不仅在数学领域里，而且在力学、物理、科技方面的运用都十分广泛。

利用矩阵这个工具，可以把线性方程组中的系数组成向量空间中的向量，研究它们的性质；这样，对于一个多元的线性方程组在什么情况下有解，在什么情况下无解，如果有解，有多少组解，不同的解之间有什么关系，等等一系列理论上的问题，就都可以得到彻底的解决。

高等代数的发展

（一）

代数学从高等代数中的问题出发，又发展成为包括许多独立分支的一个大的数学科目，在这些分支之间互相有着紧密的联系，在前几个世纪已经形成的某些分支，到现在有的还正继续发展，有的已更加完善和系统化了，线性代数就是后一情况的一个例子。线性代数由讨论线性方程组转向研究矩阵理论，以及跟矩阵相结合的向量空间和线性变换理论，形成了一个应用广泛的数学分支。

代数学研究的对象，如上所述，不仅是数，可能是矩阵、向量、向量空间的变换等，对于这些对象，都可以进行运算，虽然也叫做加法或乘法，但是关于数的基本运算定律，有时不再保

持有效，例如矩阵的乘法，交换律就不成立。因此，代数学的内容可以概括成为研究带有运算的一些集合，在数学中把这样的一些集合，叫做代数系统。下面就来概括地介绍几个重要的代数系统。

（二）

群论是数学中研究群的性质的分支，是一种特殊的代数系统。什么是群呢？简单说来，群的概念可以这样来定义：任何一个元素的集合 A，如果对集合中的某两个元素比如 g 和 h，规定一种运算，这种运算通常叫做乘法，运算的结果是 gh，通常叫做乘积；如果满足下面的条件：

第一，乘法满足结合律；也就是如果 g_1、g_2 和 g_3 是集合 A 中的任意元素，那么

$$(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)。$$

第二，存在单位元素；也就是说，集合 A 中有这样一个元素 e，集合 A 中的其他元素和 e 的乘积，还是其他元素本身，就是

$$eg=ge=g。$$

e 这个元素叫做单位元素。

第三，存在逆元素；也就是说，集合 A 中任何一个元素都有它的逆元素，任何一个元素和它的逆元素的乘积都等于单位元素。就是

$$gg^{-1}=g^{-1}g=e。$$

g^{-1}就叫做 g 的逆元素。

这样的集合 A 就叫做对于所定义的运算来说，组成了一

个群。

举例来说，全体正实数集合就构成一个群，以通常乘法作为运算，任何元素 g_1、g_2、g_3 必定满足结合律：

$$(g_1g_2)g_3=g_1(g_2g_3)。$$

这个群的单位元素是 1，因为

$$g\cdot 1=1\cdot g=g。$$

这个群的任何元素的逆元素是任何元素的倒数，因为

$$g\cdot\frac{1}{g}=\frac{1}{g}\cdot g=1,$$

1 是单位元素。所以满足上述三个条件。

全体实数构成一个群也是一个例子，以通常加法作为运算，任何元素 g_1、g_2、g_3 必定满足结合律：

$$(g_1+g_2)+g_3=g_1+(g_2+g_3)。$$

这个群的单位元素是 0，因为

$$g+0=0+g=g。$$

这个群的任何元素的逆元素是任何元素的反号数，因为

$$g+(-g)=(-g)+g=0,$$

0 是单位元素。

群内的元素如果是有限个，这个群就叫做有限群；反之，元素是无限多个，就叫做无限群。

如果一个集合只具备上面所讲三条中的第一条，那就不是群，而只是半群。

如果一个群的代数运算还同时满足交换律，这个群就叫做交换群，交换群也叫做阿贝尔群。

群论就是建立在群的基础上的数学分支。群论的发生比较早，在十九世纪初，开始的时候，伽罗华提出群的概念仅仅是为了解决高次方程的解是否能够用系数通过代数运算表示的问题，后来群论的方法和结果得到了发展，促使群论分成许多独立的课题，研究各种类型的具体的解。

群论又是研究数学和物理现象的对称性规律的有力工具。现在群的概念已成为现代数学中最重要的，具有概括性的一个数学概念，广泛应用于其他部门。

(三)

环论也是建立在环这个概念的基础上的数学分支。什么是环呢？

环是这样的一个集合：这个集合中的元素具有两种运算，通常是把这两种运算叫做加法和乘法，其中加法满足结合律和交换律，乘法满足结合律及关于加法的分配律；集合中有一个零元素，它和任何元素相加，结果还是任何元素本身；集合中还有负元素，任何元素和负元素相加的结果是零元素。这个集合就叫做环。

举例来说，如果一个集合 B，B 中的元素 d、e、f，给它规定了加法和乘法运算，而且有

$$(de)f=d(ef),$$

$$d(e+f)=de+df,$$

$$(d+e)f=df+ef。$$

这个集合 B 中还有一个元素 0，使得

$$d+0=0+d=d,$$

同时集合 B 中还有一个负元素，使得

$$d+(-d)=(-d)+d=0。$$

这个集合 B 就构成了一个环。

如果这个环的乘法还满足交换律，那么这个环就叫做交换环。如果这个环的元素都是数，那么这个环就叫做数环。

由环的概念发展建立起来的环论，是正在发展着的一个数学分支，在许多部门中已经起着重要的作用。

（四）

域论也是代数学中一个新的特殊系统。域有时叫做体，它是一个特殊的环。

关于域的概念，一般要比环稍为窄一些。它是这样定义的：如果 A 是一个交换环，在 A 里至少含有一个不等于零的元素，比如 a 是 A 的元素，而且 $a\neq 0$，a 元素还存在一个逆元素 a^{-1}，使得 $a^{-1}a=1$，那么这个交换环 A 就叫做域。如果元素是数构成的域就叫做数域。

关于群论、环论和域论这几个特殊代数系统，限于篇幅，这里就不再一一细加详述了。有兴趣的读者，可以参阅有关的参考书。

（五）

最后，我们转向整个代数学的特点问题方面来。代数学和几何学、分析数学是数学的三大基础部门，数学的各个分支的发生和发展，基本上是围绕着这三大部门进行的。那么代数学区别于其他两个部门的主要特点是什么呢？

首先，代数运算总是有限次的，而且缺乏连续性的概念，

这就是说，代数学主要是关于离散性的。尽管在现实世界中，连续性和不连续性是辩证的统一，但是为了认识现实，有时候需要把它分成几个部分，然后分别地研究这些部分，再综合起来，就得到对现实的总的认识。这是一个人人都习用的有效方法，比如对于一个整装的物件，就把它拆开来看；对于覆盖着的物件，就把它打开来看；对于一个包着的物件，就把它切开来看。这是我们认识事物的简单的但是科学的重要手段，也是代数学的基本思想和方法。代数学注意到离散关系，并不能说明这是它的缺点，实践已经多次地多方面地证明了代数学的这一特点是有效的。

其次，代数学除了对物理、化学，以及其他一些科学的直接实践的意义外，在数学本身来说，代数学也占有重要的地位。代数学中发生的许多新的思想和概念，大大地丰富了数学的许多分支，成为物理和技术科学的共同基础。

四　数学中的皇后——数论

研究整数性质的学科

(一)

人类从学会计数开始就一直和自然数打交道了，后来由于实践的需要，数的概念进一步扩充，自然数被叫做正整数，而把它们的相反数－1、－2、－3、…叫做负整数，介于正整数和负整数中间的中性数叫做0。人们把正整数、负整数和0合起来叫做整数。

对于整数可以施行加法、减法、乘法和除法四种运算，叫做四则运算。其中加法、减法和乘法这三种运算，在整数范围内可以毫无阻碍地进行。也就是说，任意两个或两个以上的整数相加、相减、相乘的时候，它们的和、差、积仍然是一个整数。整数之间的除法在整数范围内并不一定能够无阻碍地进行，比如3÷2这样简单的运算，在整数范围内却是不能进行的，也就是说，3÷2的商不可能是一个整数。

(二)

人们在对整数进行运算的应用和研究中，逐步熟悉了整数的特性，比如，整数可以分成两大类，习惯上人们把它们叫

做“单数”和“双数”。在数学的术语中，“单数”叫做“奇数”，“双数”叫做“偶数”。奇数一般用 $2n+1$ 来表示，偶数一般用 $2n$ 来表示，其中 n 是整数。

只要用数字进行一些试验，就会发现奇数和偶数的运算结果的奇偶性有下面这样的规律：

偶数±偶数＝偶数；

奇数±奇数＝偶数；

奇数±偶数＝奇数；

奇数×奇数＝奇数；

整数×偶数＝偶数。

利用整数的一些基本性质，可以进一步探索许多有趣和复杂的数学规律。比如，根据上面所讲的整数运算性质，我们可以作出这样的判定：“不存在这样的多面体，它有奇数个面，而每个面又都有奇数条边。”我们这个判定正确不正确呢？下面可以加以证明。

假设这样的多面体是存在的，那么这种多面体有 n（奇数）个面，每个面的多边形边数分别表示成 $S_1, S_2, \cdots S_n$。很明显，$Si(i=1,2,\cdots n)$ 既然是表示每个面的多边形边数，所以必然也都是奇数。现在假定这个多面体的棱数是 m，那么

$$m=\frac{S_1+S_2+\cdots+S_n}{2}. \qquad (1)$$

由(1)得

$$S_1+S_2+\cdots+S_n=2m, \qquad (m\text{是整数})$$

可见，$S_1+S_2+\cdots+S_n$ 应该是偶数。但是，另一方面 S_1+S_2+

$\cdots+S_n$是奇数个奇数的和，显然应该是奇数，这样就出现了矛盾。因此，题设的多面体是不存在的。

我们利用整数的奇偶性，竟然这样简单地就解决了上面这个看起来十分奇妙的问题，确实十分有趣。整数具有许许多多美妙的特性，正是这些特性的魅力，吸引了古往今来许多数学家不断地去研究和探索。

（三）

在研究整数特性的过程中，人们发现数和数之间有各种不同的关系，比如，有些整数可以被另一些整数整除；有些数除了1以外没有任何的公约数，等等。研究整数之间的相互联系，找出它们的规律，这样就逐步发展成一门独立的学科。

这门学科最早是从研究整数开始的，所以叫做整数论。后来整数论又进一步发展，数学上就叫做数论。确切地说，数论就是一门研究整数性质的学科。

数论的发展简况

（一）

自古以来，数学家对于整数性质的研究一直十分重视，但是直到十九世纪，这些研究的成果只是孤立地记载在各个时代的算术著作中，也就是说，这一系列理论还没有形成完整统一的学科。

在我国古代，许多著名的数学著作中都有关于数论内容的论述，比如，求"等数"（最大公约数）、勾股数组、某些不定方程整数解的问题等等。但是，这些内容的记载都是比较零

散的。

在国外，古希腊时代的数学家对于数论中一个最基本的问题——整除性问题就系统地研究过，欧几里得的《几何原本》第七、八、九篇中，记述了这些内容。在那个时代，关于质数、合数、约数、倍数等一系列概念就已经被提出来应用了。

这里我们先给上述几个概念作出简单的解释。

大于1的整数，除了它本身和1以外，不能被其他正整数所整除的数，叫做质数，也叫做素数。比如，2、3、5、7、11就都是质数。自然数有无穷多个，人们早就证明了，自然数中的质数也有无穷多个。

大于1的、但是不是质数的整数，就叫做合数。比如6，它除了1和6以外，还能被2和3所整除，6就是合数。

当整数 a 能被整数 b 所整除的时候，a 叫做 b 的倍数。反过来，b 被叫做 a 的约数或因数。比如，6是3的倍数，3就是6的约数。

两个正整数，如果除了1以外没有其他的公约数，那么这两个数就叫做互质。比如，9和25这两个数互质。

在欧几里得的《几何原本》中，不但引入了上面这些基本概念，而且对现在通用的求最大公约数的辗转相除法，也作了叙述，所以这个方法在西方也叫做欧几里得算法。

后来，各个时代的数学家也都对整数性质的研究作出过重大的贡献，使数论的基本理论逐步得到完善。

（二）

在整数性质的研究中，人们发现质数是构成正整数的基

本“材料”，要深入研究整数的性质就必须研究质数的性质。因此，关于质数性质的有关问题，一直受到数学家的注意。

首先，关于质数是有限个还是无限个呢？在《几何原本》中有“质数有无限多个”的记载，并且给出了巧妙的证明。证明的大意是这样的：

假设只有有限个质数（比如，质数是 n 个），它们分别是 P_1、P_2、P_3、…、P_n，那么

$$P = P_1P_2P_3\cdots P_n + 1$$

是大于 1 的整数。并且 P 不能被 P_1、P_2、P_3、…、P_n 中的任一个整除，因此，P 或者是一个不同于 P_1、P_2、P_3、…、P_n 的质数，或者是一个能被 P_1、P_2、P_3、…、P_n 以外的质数所整除的数。上述两种情况，无论是那一种都和假设只有 n 个质数相矛盾。这样就会得出结论，质数不是有限个，而应该是有无限多个。

其次，由于质数有无限多个，那么，怎样在自然数中把质数寻找出来呢？一般说来，我们只能找出不大于某个自然数 N 的所有质数。公元前三世纪，希腊数学家埃拉托色尼（前275-前194）发明的“筛法”，原则上解决了这个问题。比如，我们用这种“筛法”求不超过 30 的所有质数，只要把 1 到 30 这 30 个数顺序写出，划去单位 1，保留 2 但是划去其余的 2 的倍数，保留 3 但是划去其余的 3 的倍数，保留 5 但是划去其余的 5 的倍数，最后剩下的就是不超过 30 的所有质数。这些质数是 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29，共有 10 个。用这个方法原则上可以造出不超过 N（N 是大于 1 的整数）的质数表。

（三）

到了十八世纪末，历代数学家积累的关于整数性质零散知识已经十分丰富，把它们整理加工成为一门系统的学科的条件已经完全成熟了。高斯集中前人的大成，写了一本书，名字叫做《算术探讨》，1800 年寄给了法国科学院，但是法国科学院拒绝了高斯这部杰出的著作，高斯只好在 1801 年自己发表了这部著作。这部书开始了现代数论的新的纪元。到目前为止，数论方面的有关课题的工作方向，也是从《算术探讨》开始确定的。

在《算术探讨》这部书中，高斯把过去研究整数性质所用的符号标准化了，把现存的定理系统化并进行了推广，把要研究的问题和已知方法进行了分类，还引进了新的方法。

数论的研究方法和它的应用

（一）

数论形成一门独立的学科以后，随着数学其他分支的发展，研究数论的方法也在不断发展。如果按研究数论的方法来说，可以分成初等数论、解析数论、代数数论和几何数论四个部分。

初等数论是数论中不求助于其它数学部门的帮助而只依靠初等的方法来研究整数性质的分支。下面举例说说初等数论研究的具体方法。

假设两个数的每一个都可以表示成两个数的平方的和，那么，它的乘积同样也可以表示成两个数的平方的和。比

如，

$$13=3^2+2^2,\qquad 5=2^2+1^2,$$

那么

$$13\times 5=65=8^2+1^2。$$

这个性质的证明是很简单的，利用欧勒恒等式，也就是利用简单的代数知识就可以证明了。欧勒的恒等式是：

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(ac-bd)^2+(ad+bc)^2\\&=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2。\end{aligned}$$

另外，数论中还引入了同余的概念。什么叫做同余呢？给定一个正整数 m，把它叫做模，如果用 m 去除任意两个整数 a 和 b 所得的余数相同，我们就说 a、b 对模 m 同余，记作

$$a\equiv b(\mathrm{mod}\ m),$$

如果余数不同，我们就说 a、b 对模 m 不同余，记作

$$a\not\equiv b(\mathrm{mod}\ m)。$$

比如，101和 5 这两个数被 3 除，余数相同都是 2，就可以记成

$$101\equiv 5(\mathrm{mod}\ 3),$$

这个式子读作 101 和 5 对模 3 同余。

有了同余的概念，就可以用一个正整数 m 作标准，把所有的整数分成了 m 个类，也就是被 m 除余 0 的归一类，余 1 的归一类，…余$m-1$ 的归作一类。

同余虽然是新的概念，但是就研究方法来说，并没有借助其他数学分支的帮助，因此，同余式论构成了初等数论的一个

重要内容。

同余式论在我国古代早就获得了突出的成果。《孙子算经》这本古代数学著作中有一个问题被后人叫做《孙子问题》，宋代数学家秦九韶给出了《孙子问题》的一般解法，现在世界公认秦九韶的方法叫做《中国剩余定理》，或者叫做《孙子定理》。关于《孙子定理》，本章最后一节"数论是我国人民擅长的学科"还将专门给予介绍。

（二）

解析数论是用数学分析作为工具来解决数论问题的分支。数学分析是以函数作为研究对象的、在极限概念的基础上建立起来的一些学科的总称。本书后面将分别加以介绍。用数学分析来解决数论问题，这个方法是由欧勒奠基的，俄国的数学家车比雪夫(1821–1894)等也对它的发展做出过贡献。解析数论是解决数论中艰深问题的强有力的工具。比如，对于"质数有无限多个"这个命题，18世纪，欧勒给出了解析方法的证明，其中利用了数学分析中有关无穷级数的若干知识。

本世纪三十年代，苏联学者维诺格拉多夫创造性地提出了"三角和方法"，这个方法对解决某些数论难题有着重要的作用。比如在解决"充分大的奇数可以表示成三个质数的和"的问题中，维诺格拉多夫令 N 是一个充分大的奇数，用 $I(N)$ 这个符号来记 N 表示成三个质数的和的表示法的数目。换句话说，$I(N)$ 就是方程式

$$N=P_1+P_2+P_3,$$

其中 P_1, P_2, P_3 都是质数时的解的数目。

如果能确定$I(N)>0$，就表明充分大的奇数可以表示成三个质数的和。

维诺格拉多夫最后利用解析的方法解决了"任何一个充分大的奇数都是三个质数的和"这个问题。

(三)

代数数论是把整数的概念推广到代数整数的一个分支。据记载，历史上高斯是最早把整数概念推广到 $a+bi$ 形式的数的数学家，高斯证明了对这些 $a+bi$ 形式的"整数"关于带余除法的定理是成立的，其中 a、b 是通常的整数(有理整数)，i 是虚单位。高斯的证明说明有理整数范围中整除性的规律对于这种"高斯整数"也是成立的。

高斯整数 $a+bi$ 实际上是

$$x^2-2ax+(a^2+b^2)=0$$

的根，其中方程系数是有理整系数。我们不妨把普通的有理整数 a 看作有理整系数方程

$$x-a=0$$

的根。这样，人们进一步把由系数是有理数的代数方程

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的根叫做代数数，如$\sqrt{2}$、i、全体有理数等都是代数数。可以证明，全体代数数也构成一个域。另外，规定所谓代数整数是指系数是有理整数而且最高次项系数是 1 的代数方程

$$x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$$

的根。

很容易看出，$\sqrt{2}$、i、$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$等都是代数整数。也可以证明，两个代数整数的和、差、积仍是代数整数。

数学家把整数概念推广到一般代数数域上去，相应地也建立了素整数、可除性等概念。

（四）

几何数论研究的基本对象是"空间格网"。什么叫做空间格网呢？在给定的直角坐标系中，坐标全是整数的点，叫做整点；全部整点构成的组就叫做空间格网。

空间格网对几何学和结晶学有着重大的意义，对它的研究也紧密联系着象系数和变数都是整数的二次型理论这样重要的数论问题。几何数论是由德国物理学家数学家闵可夫斯基(1864-1909)等人开创和奠基的。

我们可以举二维空间的例子来说明怎样利用格子点数去计算平面上有限区域的面积，或者是反过来，在平面上已知面积的一个有限区域内计算至少包含有多少格子点。这种问题的研究可以解决用离散量去逼近连续量的方法或者反过来可以用连续量去估算零散的量。数学家曾经得出"数的几何"的基本定理，这条定理的内容是："关于原点对称的凸区域，如果除原点以外，不包含其他格点，它的面积顶多是4"。利用这条定理，二维空间的一些问题就不难解决了。

由于几何数论涉及的问题比较复杂，必须具备一定的数学基础才能深入研究，更具体的内容这里就不介绍了。

（五）

关于数论几个部分的情况，上面只作了点滴介绍，目的是使读者了解它的概貌。数论毕竟是一门高度抽象的数学学科，长期以来，它的发展处于纯理论研究状态，它对数学理论的发展起到了积极的作用。但是，它在实际应用中的作用怎样？许多读者并不十分清楚。我们根据现有的资料也在下面顺便简要地作些介绍。

由于近代计算机科学和应用数学的发展，数论得到了日益广泛的应用。比如，在计算方法、代数编码、组合论等方面都广泛使用了初等数论范围内的许多研究结果；有文献报导，现在有些国家已应用“孙子定理”来进行测距，用原根和指数来计算离散傅立叶变换等。此外，数论的许多比较深刻的研究成果也在近似分析、差集合、快速变换等方面得到了应用。

数论最初研究对离散量的计算，而后又发展成用解析方法对连续量进行计算，现在由于高速电子计算机的发展，用离散量的计算去逼近连续量而达到所要求的精度已成为可能了。可见，数论在实际应用中的作用也和其他数学分支一样是巨大的。

“皇冠”上的“明珠”

（一）

数论在数学中的地位是独特的，高斯曾经说过“数学是科学的皇后，数论是数学中的皇后”，因此，数学家都喜欢把数论中的一些悬而未决的疑难问题，叫做皇后“皇冠”上的“明珠”，

以激励人们去“摘取”。

大家知道，数论中的许多问题都是在对有限多个数观察试验的“系统尝试”中，利用不完全归纳得出“猜想”，这些“猜想”后来经过严格的证明，有一些被推翻了，有一些被证明后就成了数论中的定理，有一些至今未能给出证明的仍然叫做“猜想”。数论中被看作是“皇冠上的明珠”的一大批艰深的问题大约有二三十个，下面简要地介绍其中的几个。

（二）

法国数学家费尔马（1601-1665）提出的“费尔马大定理”是数论中的著名问题之一。这个问题是这样的：

方程 $x^n+y^n=z^n$，当 n 是大于 2 的整数的时候，不能有非零的整数解。

这个问题是在费尔马的读书笔记上发现的，1637年，费尔马在希腊数学家刁藩都所写的文章底页上写道：“要把一个立方数分为两个立方数的和，一个四次方分为两个四次方的和，一般地，把一个大于 2 次方的乘方数分为同样指数的两个乘方数的和，都是不可能的；我确实发现了这个奇妙的证明，因为这里的篇幅不够，我不能够写在这底页上。”费尔马生前一直没有公布他的证明，死后，也没有人在他的遗著中找到过关于这个命题的证明。他的儿子公布了费尔马上述的笔记后，吸引了许多数学家企图为这个命题补一个证明，但是，人们很快发现这是一件十分艰难的事情。

方程 $x^n+y^n=z^n$，当 $n=2$ 的时候，由勾股定理可知 $x=3$，$y=4$，$z=5$，就是

$$x^2+y^2=z^2$$

的一组非零整数解。由初等方法可以找到

$$x^2+y^2=z^2$$

的一切整数解的通式是

$$x=k(a^2-b^2),\ y=2kab,\ z=k(a^2+b^2),$$

其中 a、b 是互质的两个整数，k 是任意整数。经过数学家们的努力研究，在过了一百年以后，才由欧勒首先给出证明，当 $n=3$，$n=4$ 的时候，费尔马的命题是正确的。到现在为止，“费尔马大定理”已提出三百多年了，数学家只证明了当

$$2<n<1000000$$

的时候，$x^n+y^n=z^n$ 确实没有正整数解。

数学家们虽然一直未能找出“费尔马大定理”的一般性的证明，但是由于对它的研究，大大地推动了数学的进展。受“费尔马大定理”的启发，1848年，德国数学家库麦尔（1810-1893）研究各种数域中的因子分解问题，引进了“理想数”，并且发现了把一个循环域的数分解成理想质因子的唯一分解定理。这个定理后来已被德国数学家戴德金（1831-1916）和克朗尼克推广到任意代数域，在近代数论中占着中心地位，它的意义已经远远超出数论的范围而深入到代数和函数论的领域里去了。

（三）

“孪生质数问题”也是数论中一个古老的难题。什么叫做孪生质数问题呢？数学家早就注意到，在质数组成的无穷数列中，有许多是成对出现的，比如，3 和 5，5 和 7，11 和 13，

17和19，29和31，41和43，59和61，71和73，等等。这种成对出现的两个质数，前后两者的差是2，这样的两个质数好象"双胞胎"一样，所以叫做"孪生质数"。孪生质数是不是有无限多对呢？这就引起了数学家的猜想。

人们通过寻找，发现孪生质数的分布越来越稀疏，在1到100中间共有8对孪生质数，也就是前面所提到的，在1到100000中间有1125对孪生质数，现在已经知道在3300万以前共有152892对孪生质数，已知的最大的一对孪生质数是$76\times3^{169}-1$和$76\times3^{169}+1$。

由于电子计算机的使用，为人们不断寻找更大的孪生质数提供了条件。上面的统计也提示人们，可能存在着无穷多对孪生质数。但是，迄今也没有人给出关于这个问题的证明，这就是有名的"孪生质数猜想"。

（四）

"哥德巴赫猜想"也是数论中的一个著名问题。1742年，哥德巴赫（1690-1764）写信给欧勒，提出了这样的推测："每一个大于2的偶数都是两个质数的和。"比如：

$$4=2+2,\ 6=3+3,\ 8=3+5,\ 10=3+7,$$

$$24=11+13,\quad 100=3+97;\text{等等。}$$

验算的数越多，越增强这个推测的可信程度。不久，欧勒复信给哥德巴赫说："任何大于4的偶数都是两个奇质数的和，虽然我还不能证明它，但是我确信无疑认为这是完全正确的定理。"这个推测，欧勒一直到死也未能给予证明。

推测提出二百多年来，一直没有人能够给出证明，它成了

一道著名的难题，吸引着许多数学家去研究，并被叫做"哥德巴赫猜想"。1900年，德国数学家希尔伯特（1862-1943）在一次国际数学会的演说中，提出了具有重要意义的23个问题，哥德巴赫猜想被列为第8问题的一部分。1921年，英国数学家哈代曾说，哥德巴赫猜想的困难程度是可以和任何没有解决的数学问题相比的。

（五）

数论中的难题还有很多，比如，圆内整点问题、等差数列中质数分布问题、完全数问题，等等。有兴趣的读者可参阅有关的介绍。

上面列举的这些"猜想"，好象数论领域里一座座高峰，吸引了许多数学家去攀登。又好象是皇冠上闪闪发光的明珠，等待着杰出的数学家去摘取。

数论是我国人民擅长的学科

（一）

无论是古代还是现代，中国人民对数论都有过重要的研究成果，为数论的发展作出过重大的贡献，可以说数论是我国人民擅长的学科。

前面谈到同余式理论的时候，曾经提到了"孙子定理"，它就是我们中华民族对数论作出的一项杰出的贡献。关于这个定理的运用，这里简举一例谈谈它的解法。

《孙子算经》中有一题叫"物不知数"，内容是：现在有一些物品，不知道它的数目，三个三个地数剩下两个，五个五个地

数剩下三个，七个七个地数剩下两个，问这些物品共有多少？

这个问题用同余式理论的现代符号来表示，它的解法就是：

设 x 是要求出的物品数，那么

$$x\equiv 2 \pmod{3},$$
$$x\equiv 3 \pmod{5},$$
$$x\equiv 2 \pmod{7}。$$

解这同余式组，求得

$$x\equiv 23 \pmod{105},$$

所以这个题的最小正整数解是23。

一般地解

$$x\equiv a \pmod{3},\ x\equiv b \pmod{5},\ x\equiv c \pmod{7},$$

可得

$$x\equiv 70a+21b+15c \pmod{105}。$$

这个解法，我国古代曾用歌诀形式来表示，这首歌也叫做“孙子歌”，内容如下：

三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百零五便得知。

它的意思就是说，用 a 乘以 70，用 b 乘以 21，用 c 乘 15，三个乘积相加的和减去 105 的某个倍数，就得到答案了。这就是著名的“孙子定理”，西方人十分惊叹中国数学家对这类问题的解法，把它誉为«中国剩余定理»。这类问题的详细情况，有兴趣的读者可参阅中国青年出版社出版的«中国古代科技成就»，这里就不详述了。

（二）

在我国近代，数论也是发展最早的数学分支之一。从三十年代开始，在解析数论、刁藩都方程、一致分布等方面都有过重要贡献，出现了象华罗庚(1910-)、闵嗣鹤、柯召等第一流的数论专家。其中华罗庚教授在三角和估值和堆垒素数论方面的卓越贡献和优秀成果是国内外公认的。他的《数论导引》、《堆垒素数论》等都是享有盛名的数学专著。

全国解放以后，数论的研究得到了更大的发展。特别是在"筛法"和"哥德巴赫猜想"方面的研究，坚持二十多年，现在已取得了领先于世界的优秀成绩。

关于"哥德巴赫猜想"，数学界习惯于把"每一个大偶数可以表示成一个质因子个数不超过 a 个的数和一个质因子个数不超过 b 个的数的和"简单地叫做 $(a+b)$，因此可把"对充分大的偶数可以表示成两个质数的和"简单地叫做 $(1+1)$。1958年，数学家王元证明了 $(2+3)$；1962年，潘承洞证明了 $(1+5)$；同年，王元、潘承洞又证明了 $(1+4)$；1966年，陈景润(1933-)继外国人证明了 $(1+3)$ 之后，宣布他已证明了 $(1+2)$。1977年，《中国科学》第二期公布了陈景润的论文《大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和》。陈景润的方法被誉为《陈氏定理》，在国际数学界引起了强烈的反响，国外数学界称赞陈景润的论文是解析数论的名作，是筛法的光辉顶点，是对研究哥德巴赫猜想的重大贡献。

五　欧几里得几何学

几何学的产生和发展

(一)

“几何”这个词在汉语里是“多少?”的意思，但是在数学这门科学里，“几何”的涵义就完全不是什么“多少?”了。

“几何”这个词在拉丁文里是“geometria”，拉丁文的词又来自希腊文“γεωμετρία”，希腊文的原意是土地测量，或者叫做测地术。“几何”作为数学的术语出现，“几何学”作为一门数学的分支，在我国最早是在1607年。那时候，意大利传教士利玛窦(1552-1610)和我国明朝的徐光启(1562-1633)合译了古希腊数学家欧几里得的一部著作的前六卷，是由英译本翻译过来的，中译名叫做«几何原本»。“几何”这个概念作为研究“点、线、面、体”等有关空间图形的数量关系和位置关系的学科的名称，就是在那个时候开始沿用下来的。

(二)

几何学和算术一样产生于实践，也可以说几何产生的历史和算术是相似的。在远古时代，人们在实践中积累了十分丰富的各种平面、直线、方、圆、长、短、宽、窄、厚、薄等概念，并

且逐步认识了这些概念之间、它们以及它们之间位置关系跟数量之间有什么关系，这些后来就成了几何学的基本概念。随着生产力的发展，人们在从事农业生产的时候，要测量土地；为了抵御自然力的袭击，要构筑房屋；为了生产和生活要制造器皿，这些活动都需要几何知识。正是生产实践的需要，原始的几何概念便逐步形成了比较粗浅的几何知识。虽然这些知识是零散的，而且大多数是经验性的，但是几何学就是建立在这些零散的、经验性的、粗浅的几何知识之上的。

几何学是数学中最古老的分支之一，也是在数学这个领域里最基础的分支之一。古代中国、古巴比伦、古埃及、古印度、古希腊都是几何学的重要发源地。

大量出土文物证明，在我国的史前时期，人们已经掌握了许多几何的基本知识，看一看远古时代人们使用过的物品中那许许多多精巧的、对称的图案的绘制，一些设计简单但是讲究体积和容积比例的器皿，都足以说明当时人们掌握的几何知识是多么丰富了。

中国有一部古书叫做《尸子》，是两千多年前战国时代的尸佼（约前 390-约前 330）写的，书内记有"古者，倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉。"意思是说，古时候有一个人叫做倕，他制造了规、矩、准、绳这些工具用来测量圆、方、平、直，天下的人都照他那样做了。倕传说是黄帝或者唐尧时候的能工巧匠，也就是说四千五百多年前，我国就有了许多几何的概念。

传说大约四千一百多年前的夏禹在治水的时候，就是右手拿着测量用的绳子，左手拿着圆规和曲尺，治水需要疏通河

道、引水分洪、构筑堤坝，没有几何方面的一些基本知识，要完成这些工程，治理水灾也是不可能的。

在我国最早的一部数学著作《周髀算经》里，记载了不少几何方面的知识。如西方的"毕达哥拉斯定理"，大约是在二千五百多年前，由古希腊数学家毕达哥拉斯(约前580-前500)提出来的。但是，这个定理在我国比毕达哥拉斯早几百年就由周朝的商高（约前1100年左右）提出来了，叫做勾股定理。这些充分说明我们古老的祖国是几何学的发源地。

(三)

几何成为一门系统的学科，从发展史的角度来说，希腊的学者在这方面的工作曾起了十分关键性的作用。

两千多年前的古希腊商业繁荣，生产比较发达，一批学者热心追求科学知识，研究几何就是最感兴趣的内容，在这里应当提及的是哲学家、几何学家柏拉图（前429-前348）和哲学家亚里士多德(前384-前322)对发展几何学的贡献。柏拉图把逻辑学的思想方法引入了几何，使原始的几何知识受逻辑学的指导逐步趋向于系统和严密的方向发展。

柏拉图在雅典给他的学生讲授几何学，已经运用逻辑推理的方法对几何中的一些命题作了论证。亚里士多德被公认是逻辑学的创始人，他所提出的"三段论"的演绎推理的方法，对于几何学的发展，影响更是巨大的。到今天，在初等几何学中，仍是运用三段论的形式来进行推理。

但是，尽管那时候已经有了十分丰富的几何知识，这些知识仍然是零散的、孤立的、不系统的。真正把几何总结成一门

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

原书缺页

这五组公理加起来共有 20 条，这些公理合起来共同组成了今天的平面和空间几何的完整的公理系统。

在几何学中，如果满足上面讲的 5 组公理的几何，就叫做欧氏几何学。例如平面几何、立体几何和解析几何就都属于欧氏几何的内容。

（三）

目前，在中学的几何（平面几何、立体几何）体系，不但保留了欧几里得《几何原本》的主要内容，在选取公理内容的时候，有的也是从希尔伯特公理体系中适当选取的。有的是选取后加以“改造”，比如，有些立体几何教科书，首先就引入 3 条公理。这 3 条公理是：

公理　如果一条直线上有两个点在一个平面，那么这直线上所有的点都在这个平面内。

公理　过不在一直线上的三点可确定一个平面。

公理　如果两个平面有一个公共点，那么它们就相交于经过这点的一条直线。

可以看出，这 3 条公理实际上就是从希尔伯特结合公理组中直接从第Ⅰ组的第 6 条、第 1 条、第 2 条和第 7 条中选取或者适当作了“改造”的。这样处理的目的是从教育的观点出发，以便适合于青少年的年龄特点和接受能力。

总之，建立了希尔伯特公理体系（也叫做希氏公理体系）后，初等几何学就可以从这些公理以及有关几何元素的定义出发，进行严谨的演绎推理，从而导出初等几何学的全部内容。

（四）

希尔伯特不仅提出了一个完善的几何体系，并且还提出了建立一个公理系统的原则。就是在一个几何公理系统中，采取哪些公理，应该包含多少条公理，应当考虑如下三个方面的问题：

第一，共存性（和谐性），就是在一个公理系统中，各条公理应该是不矛盾的，它们和谐而共存在同一系统中。

第二，独立性，公理体系中的每条公理应该是各自独立而互不依附的，没有一条公理是可以从其它公理引伸出来的。

第三，完备性，公理体系中所包含的公理应该是足够能证明本学科的任何新命题。

这种用公理系统来定义几何学中的基本对象和它的关系的研究方法，成了数学中所谓的“公理化方法”，而把欧几里得在《几何原本》提出的体系叫做古典公理法。

公理化的方法给几何学的研究带来了一个新颖的观点，在公理法理论中，由于基本对象不予定义，因此就不必探究对象的直观形象是什么，只专门研究抽象的对象之间的关系、性质。从公理法的角度看，我们可以任意地用点、线、面代表具体的事物，只要这些具体事物之间满足公理中的结合关系、顺序关系、合同关系等，使这些关系满足公理系统中所规定的要求，这就构成了几何学。因此，凡是符合公理系统的元素都能构成几何学，每一个几何学的直观形象不止只有一个，而是可能有无穷多个，每一种直观形象我们把它叫做几何学的解释，或者叫做某种几何学的模型。平常我们所熟悉的几何图形，

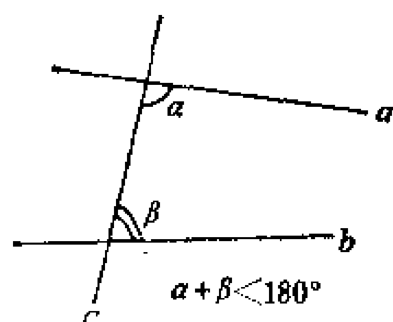
在研究几何学的时候，并不是必须的，它不过是一种直观形象而已。因此，几何学研究的对象就更加广泛，几何学的含义比欧几里得时代更为抽象。这些，都对近代几何学的发展带来了深远的影响。由于希尔伯特公理体系的特点是完全脱离了直观的约束，这样就可以抽象地展开逻辑的推导，使得整个几何向着抽象的方向发展，这个正是近代几何学的一个特点。

六 “不可思议”的几何——非欧几何学

从第五公设谈起

（一）

欧几里得的《几何原本》提出了五条公设，前面已经介绍过了。在这里，我们特别提出第五公设。如下图所示，直线 a、b 被直线 c 所截，在截线一侧的两个同侧内角 $\angle\alpha+\angle\beta<180^\circ$，那么直线 a、b 在向右侧无限延长一定会相交。一些数学家后来证明了这条公设和“过已知直线外的一个已知点只能作一条直线和已知直线平行”实际上是等价的命题。



长期以来，数学家们发现第五公设和前四个公设相比，显得文字叙述冗长，而且也不那么显而易见。有些数学家还特别注意到欧几里得在《几何原本》一书中迟迟地到了第二十九个命题中才用到，而且此后再也不用了。这也就是说，在欧几里得的《几何原本》中可以不依靠第五公设而推出前二十八个命题。因此，一些数学家提出：第五公设能不能不作为公设而

作为定理？能不能依靠其他公设和命题来证明第五公设？这就是几何发展史上最著名的长达两千年的关于“平行线理论”的讨论。

（二）

在这漫长的讨论过程中，虽然耗费了许多数学家的精力，但是一直没有取得任何的结果。有些数学家在证明第五公设的时候，使用的论据实际上都是在假定第五公设成立的前提下才成立的。如果第五公设不成立，那么这些定理也不成立。因此，这些数学家在证明第五公设的时候，就犯了逻辑上循环论证的错误。

在深入讨论如何证明第五公设问题的过程中，数学家们虽然没有能够证明第五公设，但是他们的研究活动却促进了几何学的发展。比如发现了一批和第五公设等价的命题：

三角形的内角和等于 $2d$ 和第五公设是等价命题；

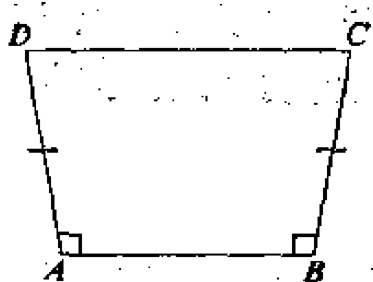
平行公理和第五公设是等价命题；

n 边形的内角和是 $(2n-4)d$ 和第五公设是等价命题；

…………

后来一些数学家就转而企图不用第五公设去证明第五公设的某一个等价命题。假若证明成功了，那么回过头来就可以把第五公设变成定理。

在这里介绍一下意大利数学家萨开里（1667-1733）的证明。萨开里的研究是从四边形的内角和出发，他试图不用第五公设而证明四边形的内角和是 $4d$ 。假若他证明成功了，第五公设就可以成定理了。



萨开里假设一个四边形$ABCD$如左图所示，边$AD=BC$，$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，这个四边形叫做萨开里四边形。因为$AD\perp AB$，$BC\perp AB$，那么$\angle A$、$\angle B$都是直角，并且可以证明$\angle C=\angle D$，对其余的两个角，他作了三种假设：

第一种假设：$\angle C$和$\angle D$都是锐角（叫做锐角假设）；

第二种假设：$\angle C$和$\angle D$都是钝角（叫做钝角假设）；

第三种假设：$\angle C$和$\angle D$都是直角（叫做直角假设）。

为了证明$\angle D=d$，只须否定$\angle D>d$和$\angle D<d$就可以了。萨开里很快地把$\angle D>d$引向矛盾。但在证明$\angle D<d$的推理过程中，他引出的推论很多，一直引出第38个命题："在平面上存在两条直线l_1和l_2（右下图）使它们在一方无限相互接近，且在反方向无限地分开，这样，l_1和l_2将在无限远点P_∞有着共同的垂线l。"萨开里认为这是不可能的，因此就"归引"出矛盾了。从而，他认为$\angle C=\angle D=d$，因而宣布第五公设已被证明。实际上，上面引出的结论并没有矛盾，萨开里认为的矛盾，只是在推理中和人们对普通的几何的认识的观念不相容，错误地用有限图形的性质去判定无限图形的性质。



非欧几何的诞生

（一）

由于证明第五公设的问题始终没有解决，人们逐渐怀疑

证明的路子走得对不对？第五公设到底能不能证明？

到了十九世纪二十年代，俄国喀山大学教授罗巴切夫斯基在证明第五公设的过程中，他走了另一条路子。他放弃了欧氏平行公理而提出了一个和欧氏平行公理相矛盾的命题："过不在已知直线上的一点，可以引不止一条而至少是两条直线和已知直线平行"，他用这个命题来代替第五公设，然后把欧几里得的其它公设、公理、定义以及跟第五公设没有关系的定理（比如前26个定理）作为一个公理系统展开一系列的逻辑推理。他认为如果这个系统中出现矛盾，这就等于用反证法证明了第五公设。但是他在极为深入细致地进行推理的过程中，得出了一个一个在逻辑上毫无矛盾的命题。最后，罗巴切夫斯基得出两个极为重要的结论：

第一，第五公设不能证明；

第二，在新的公理系统中展开的一连串的推理，得到的一系列在逻辑上无矛盾的新的定理，形成了新的理论。这个新的理论象欧氏几何一样是完善的、严密的几何学。

这种几何学被叫做罗巴切夫斯基几何，简称做罗氏几何，属于人们通称的非欧几里得几何的一种。

从罗巴切夫斯基创立的非欧几何学中，可以得出一个极为重要的、具有普遍意义的结论：逻辑上互不矛盾的一组假设都有可能提供一种几何学。

（二）

几乎在罗巴切夫斯基创立非欧几何学的同时，匈牙利的鲍耶·雅诺什（1802-1860）也发现了第五公设不可证明

和非欧几何学的存在。鲍耶在研究非欧几何学的过程中，他也遭到了家庭、社会的冷漠对待，他的父亲鲍耶·法尔卡什(1775-1856)是一个数学家，认为研究第五公设是耗费精力劳而无功的蠢事，劝他放弃这种研究。但是鲍耶·雅诺什坚持为发展新的几何而辛勤地工作，终于在1832年，在他父亲的一本著作里，以附录的方式发表了研究结果。

那个时代被誉为"数学王子"的高斯也发现第五公设不能证明，并且研究了非欧几何。但是，高斯害怕这种理论会遭到当时教会力量的打击和迫害，一直不敢公开发表自己的研究成果，只是在书信中给自己的朋友表示了自己的看法，也不敢站出来公开支持罗巴切夫斯基、鲍耶他们的新理论。

罗氏几何学

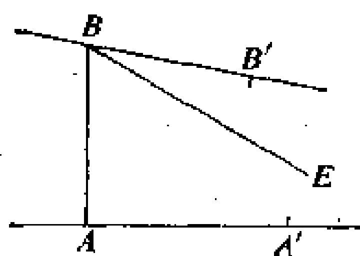
(一)

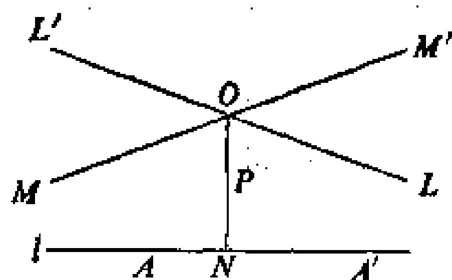
罗氏几何学的公理系统和欧氏几何学不同的地方仅仅是把欧氏平行公理用"从直线外一点，至少可以作两条直线和这条直线平行"来代替，其他公理绝大部分相同。由于平行公理不同，经过演绎推理却引出了一连串和欧几里得几何内容不同的新的几何命题。

首先是关于平行线的定义。在欧氏几何学中把共面的两条不相交的直线叫做平行直线，而在罗氏几何中却规定了新的定义，所谓直线 AA' 和 BB' 平行，必须满足下列三个条件：

第一，直线 AA' 和 BB' 在一个平面上；

第二，直线 AA' 和 BB' 不相交；

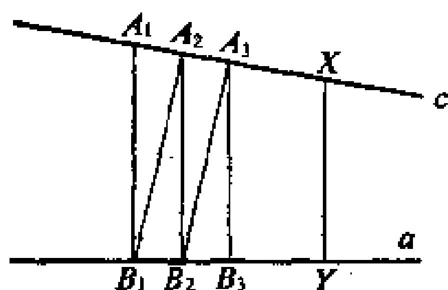




第三，在$\angle ABB'$内，从B引直线一定和AA'相交。

这三个条件如本页上端左边的图所示。

罗氏平行公理是这样说的：从直线l外一点O，至少可以引和l不相交的两条直线OL和OM，例如本页右上图所示那样，直线OL叫做右平行线，直线OM叫做左平行线。从O向直线l引垂线ON，设$ON=P$，那么，$\angle NOL$就随P的变化而变化，把这个角叫作平行角，用$\pi(P)$来表示，当$P\to\infty$的时候，$\pi(P)\to 0$，当$P\to 0$的时候，$\pi(P)\to$直角。因为一般来说，$\pi(P)$小于直角，所以OL的反向线OL'离直线l越来越远。



又如右图所示，a和c是右平行线。现在观察直线c上的一点X到直线a的距离XY随着X点的移动，看看它将怎样变化？

从A_1向直线a引垂线A_1B_1，从点B_1向直线C引垂线B_1A_2；再从点A_2向直线a引垂线A_2B_2，从点B_2向直线C引垂线B_2A_3，很容易证明$A_2B_2<A_1B_1$，$A_3B_3<A_2B_2$。如果再继续这样作下去，点A_1、A_2、A_3……到直线a的距离变得越来越小，换句话说，就是当点X向右移动的时候，它到直线a的距

离 XY 逐渐变小，当点 X 趋向无限远的时候，$XY\to 0$，就是说平行直线 a 和 c 渐近地逼近。

同时可以证明，它们的距离在相反方向不仅增大，而且趋向无穷。这个结论和欧氏几何里的平行线间的距离处处相等的概念差别多么大！

（二）

由于平行线的定义不同，平行线公理不同，因此，在欧氏几何中，凡是和平行线有关的一些命题，在罗氏几何中就有新的意义。下面列举罗氏几何中的一些命题，如：

两条直线或者相交或者平行。如果平行，它们在一侧渐近地逼近，而在另一侧则无限地分离。

同一直线的两条垂线，它们是离散的。

三角形两边中点的连线常和底边是离散的。

三角形各内角之和总小于两个直角，而且不同的三角形有不同的内角和。

任何凸四边形的内角和小于四个直角，因此，不存在矩形。

三角形面积和两直角跟它的内角和的差成正比。如果以 $S(\triangle)$ 表示三角形的面积，以 α、β、γ 分别表示三角形的三个内角，那么

$$S(\triangle)=K(\pi-\alpha-\beta-\gamma)。$$

这里，$\pi-\alpha-\beta-\gamma$ 叫做“亏损”。可以看到，三角形内角和对 π 的亏损因它的面积增大而增大。

（三）

我们知道，罗氏几何除了一个平行公理之外采用了欧氏

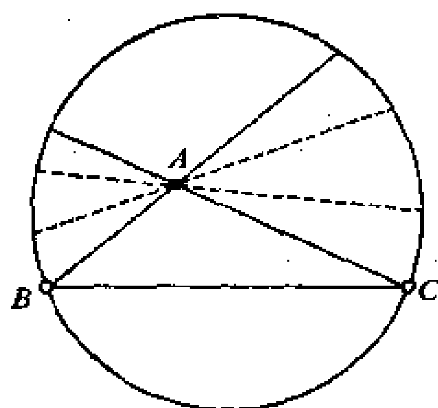
几何的一切公理。因此，凡是不涉及到平行公理的几何命题，在欧氏几何中如果是正确的，在罗氏几何中也同样是正确的。在欧氏几何中，凡涉及到平行公理的命题，在罗氏几何中都不成立，它们都相应地含有新的意义。下面举几个例子加以对比说明：

欧氏几何	罗氏几何
同一直线的垂线和斜线相交。	同一直线的垂线和斜线不一定相交。
垂直于同一直线的两条直线互相平行。	垂直于同一直线的两条直线，当两端延长的时候，离散到无穷。
存在相似的多边形。	不存在相似图形。
过不在同一直线上的三点可以作且仅能作一个圆。	过不在同一直线上的三点，不一定能作一个圆。

从前面所列举的罗氏几何中的一些命题可以看到，这些命题和我们所习惯的直观形象有矛盾。所以罗氏几何中的一些几何事实没有象欧氏几何那样容易被人们接受。但是，数学家们经过研究，提出可以用我们习惯的欧氏几何中的事实作一个直观“模型”来解释罗氏几何是正确的。

德国数学家克莱因（1849-1925）就提出了一个简单的模型，他的主要想法是，利用欧氏几何中的元素，然后对其中某些元素给予新的约定，并说明它们之间的关系。因为这种几何只是用另外的观点和字眼来描述通常的欧氏几何中的元素，因此，它和欧氏几何一样是正确的。

克莱因的罗氏几何模型是：在普通的欧氏平面上取一个圆，而且只考虑圆的内部。我们约定把圆的这个内部叫做"平面"(它起着罗氏平面的作用，圆内的点叫做罗氏点)。把圆的弦叫做"罗氏直线"(弦和圆周的交点除外)。此外，连接这平面上两点的"直线"以及求两条"直线"的交点那么就和欧氏几何中的情形相同。左面这个图就能说明这个模型。通过已知点 A 而且不和已知弦 BC 相交的弦至少有两条(比如过 B 和 C 的两条弦。因为规定把弦和圆的交点除外，所以它们和 BC 没有交点)，这和罗氏平行公理"过不在已知直线上的一点至少可以引两条直线不与已知直线相交。"是一致的。



通过观察这个"模型"，使我们认识到罗氏几何的内容可以理解成是欧氏几何中圆内的几何学的独特的命题，从而证实了罗氏几何的现实意义。此外，也解答了欧氏几何的平行公设不能由其他公设得到，否则欧氏几何的平行公设在克莱因的"模型"中也一定成立。但是事实却并非如此。

黎曼几何学

(一)

非欧几何学是一门大的数学分支，一般来说，它有广义、狭义、通常意义这三个方面的不同含义。所谓广义是泛指一

切和欧几里得几何不同的几何学，狭义的非欧几何只是指罗氏几何来说的，至于通常意义的非欧几何，就是指罗氏几何和黎氏几何这两种几何。

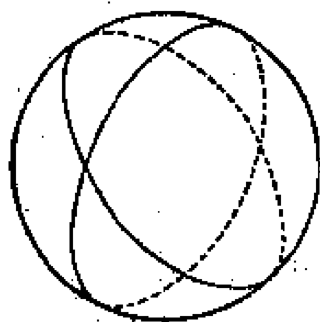
前面已经讲了罗氏几何，我们在这一节里再简略介绍一下黎氏几何。

黎氏几何是德国数学家黎曼（1826-1866）创立的。他在1851年所作的一篇论文“论几何学作为基础的假设”中明确提出另一种几何学的存在，开创了几何学的另一片广阔的领域。后来就叫做黎曼几何学，也叫黎氏几何学。

（二）

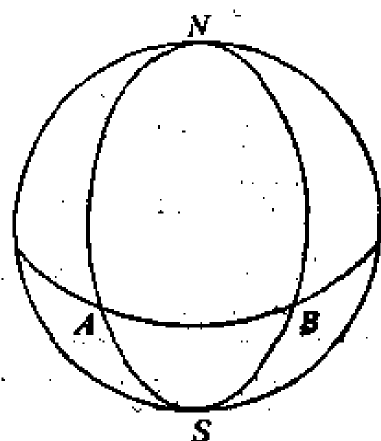
我们知道，欧氏几何、罗氏几何中关于结合公理、顺序公理、连续公理以及合同公理都是相同的，只是平行公理不一致。欧氏几何的平行公理是“过线外一点在平面上有且仅有一条直线与已知直线平行。”罗氏几何的平行公理是“过直线外一点在平面上至少存在两条直线和已知直线平行。”那么是否存在这样的几何，这种几何规定：过线外一点在平面上不能作直线和已知直线平行？黎曼几何学就回答了这个问题。

在黎曼几何中的一条基本规定是：在同一平面内任何两条直线都有公共点，这个事实我们可以从三度空间中的二度球面来进行观察。如右图所示，在这个球面上我们把“直线”规定是这个球面的大圆，这样的直线是封闭的。在这种几何里，就这个图来说，任意两条“直线”必然



相交。因此，过一定直线外一点，永远都不能作“直线”平行于这条定直线。此外，在球面上任意两点间的距离是过这两点的大圆上介于这两点间比较短的弧的弧长，这也是过这两点的一切弧中最短的弧（这和欧氏几何中平面上任意两点间的直线距离最短是吻合的）。

在黎曼几何中有一个重要结论，就是“三角形的三个内角和大于180°”。这是因为在这种几何里，“直线”是球面上的大圆弧，球面上三条这样的直线可以构成一个三角形。例如，



在左图的球面上过北极N和南极S的两条大圆弧（也叫做子午线），和赤道围成一个三角形，也就是图中的$\triangle NAB$。我们知道，子午线是垂直于赤道的，因此，这样的球面三角形的三个角中已经有了两个直角，再加上第三个角，三角形的内角和就大于180°。这是黎曼几何中的一个重要的结论。

（三）

在黎曼几何学中不承认平行线的存在，还有两条公设：第一，同一平面上的任何两条直线一定相交。第二，直线可以无限延长，但总的长度是有限制的。

前面在讨论欧几里得平行理论的时候，萨开里在他的证明中，曾提到过所谓萨开里四边形的三种假设，就是直角假设、锐角假设和钝角假设。后来人们才搞清楚，从锐角假设可

以推出罗氏几何的一些事实，从钝角假设可以推出一系列结论，如不存在平行线、三角形内角和大于 180°、直线的长度是有限的，等等。这也就是说，由萨开里的钝角假设就可以推出黎曼几何的事实。

黎曼几何的模型是一个经过适当"改造"的球面。在欧氏空间中任取一个球面，约定把球面上的对径点(通过球心的直径的两端的点叫对径点）看作是一个对象，叫做黎曼几何的点。黎曼几何的直线是球面上的大圆，大圆上的对径点仍看作是一个点，对径点统一起来的球面便叫做黎氏平面。可以看出，黎氏直线是封闭的。黎氏点和黎氏直线的结合关系，便是球面上的点和这个圆上大圆弧的普通的结合关系。比如：

通过两个黎氏点可以引唯一的黎氏直线；

每条黎氏直线上至少有两个黎氏点（实际上有无穷多个点）存在不共黎氏直线的三个黎氏点；

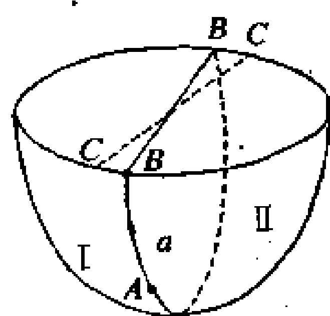
黎氏平面上任意的两条直线必有唯一的交点。

这最后一点的内容形成了黎曼几何不同于欧氏几何和罗氏几何的主要特点。由这一条规定可以得到，在黎曼几何中不存在平行线，同样在黎曼空间里也没有平行平面，更不可能有直线和平面的平行。

黎曼几何就是这样一种几何学。它符合结合公理，但是却没有平行线，而且三角形的内角和大于 180°。二维黎曼几何也是欧氏平面几何在曲面情形的推广，但和欧氏几何根本不同。

在这里谈谈黎氏平面的特点。

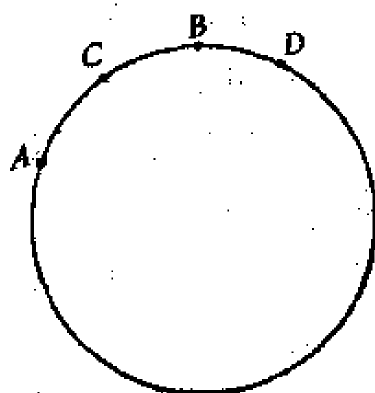
根据约定，对径点统一起来的球面就叫做黎氏平面，所以黎氏平面的"模型"就是半球面。在欧氏平面上，任意一条直线把平面分成两部分，但是黎氏平面上的一条直线却不能把平面分成两个不同的部分。如左面这幅图，假如有一个人沿着直线 a，由点 A 起向前走（沿箭头所示的方向前进），他的左边是图中"Ⅰ"的部分，右边是图中"Ⅱ"的部分，当他越过了图中的对径点 B 之后，原来在左边"Ⅰ"部分的 C 点就落在它的右边"Ⅱ"的部分了，所以直线 a 的两侧并不是两个不相连的部分，因此就不好区分那一部分在直线 a 的左侧，那一部分在直线 a 的右侧。黎曼平面的上述性质叫做具有单侧性。



（四）

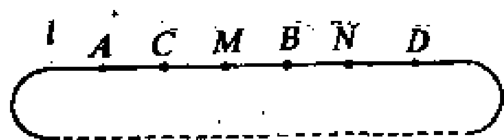
在欧氏几何和罗氏几何中都可以引用的"顺序公理"在黎曼几何中是怎样叙述的？

在黎曼几何中关于直线上点的顺序的内容叙述和欧氏几何中的叙述是不同的，由于黎氏直线类属于圆周的性质，所以在封闭线上的三个不同点 A、B、C（见右图），如果 C 是介于 A 和 B 之间，B 也可以看作是介于 A 和 C 之间，因此用三个点来叙述封闭线上点的顺序是没有意义的，这就需要借用圆周上的四个点来



建立点的顺序关系。在上页右下图中，圆周上的四点A、B、C、D，把它们分成两组A、B和C、D。若从A按顺时针方向沿圆周运动到B，必经过C；从B按顺时针方向到A必经过D。这样就可以规定：点A、B(也叫做点对A、B)分割点对C、D，点对A、C和B、D不互相分割。可以看出，在黎曼几何中，在直线上建立点的顺序的时候，把两个点对的分割性作为原始概念。比如，黎曼几何中的顺序公理中的一条就是这样叙述的：不论A、B、C、是任意直线l上什么样的三点，这直线上必有点D使点对A、B分割点对C、D。在建立了直线上点的顺序之后，便可以引进线段、角和三角形等概念。不过，一些概念在欧氏几何中很容易理解，但在黎氏几何就不那么容易了。

现在举例来说明在黎曼几何中是怎样定义线段的。如下图所示，在直线l上有点A、B、C、D，而且点对C、D分割点对A、B；又在直线l上



存在这样的点M，使点对C、M不分割点对A、B；象这样组成的集合就叫做线段。点A和B叫做线段的端点。由于C点的位置具有一般性，所以由点A、B、D以及使点对D、N不分割点对A、B的点N所成的集合也是线段。所以在直线l上又可以得到另外一条线段，它也是以A、B为两个端点。因此，在黎曼几何中以两个已知点为端点的线段有两条。这和欧氏几何中线段的定义截然不同。

（五）

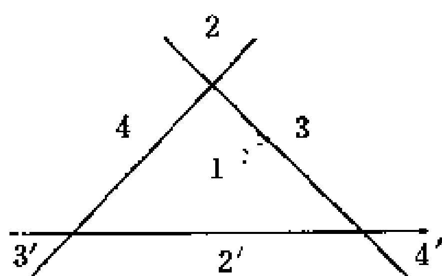
黎曼几何中有一些命题和欧氏几何、罗氏几何中相应的

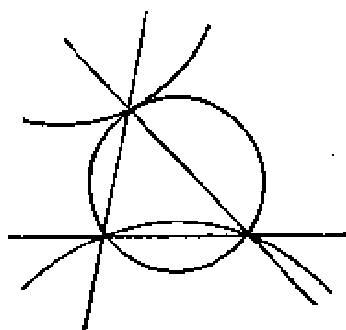
五

命题是相同的，比如“三角形的任一边小于其他两边的和”，“在连结两个已知点的一切曲线中都是以线段为最短。”只是在黎曼几何中类似于平面上直线的概念是所谓“短程线”。在黎曼几何中的三角形的边都是以短程线为边的。

但是，在黎曼几何中还有许多不同于欧氏几何和罗氏几何的命题。例如：

“过不共线的三点确定四个不同的三角形。”这是因为在黎曼几何中直线的形象是封闭的，如下面左边图中的 2 和 2′ 合成一个三角形，同样 4 和 4′、3 和 3′ 各合成三角形，所以共组成四个不同的三角形。





“过不在一条直线上的三点确定四个不同的圆。”我们从上面右图可以看见，因为三角形有而且仅仅有一个外接圆，而过不共线的三点可以确定四个不同的三角形，所以过这样的三点可以确定四个不同的圆。上面右图中只画出了其中的两个圆：一个是外接圆；上下两段弧各是第二个圆周的一部分。

“存在有三个直角的三角形。”这是黎曼几何中三角形内角和大于 180° 的定理的特殊体现。

黎曼几何不存在相似形。

在黎曼几何中还有一个特点，就是点和直线、线段和角是“平等”的。具体地说，如果我们在任一正确命题中，用“直线”代替“点”，用“点”代替“直线”，用“角”代替“线段”，用“线段”代替“角”，其余都不变，那么可以得到一个新的正确的命题。比如：

直接命题：相异两点确定一条直线。

立刻得出另一命题：相异两条直线确定一点。

（六）

在黎曼几何中，主要讨论非欧几里得的黎曼空间的测度问题。所谓黎曼空间，通俗地说就是在无限小的范围里的欧几里得式的空间。黎曼认为在这种空间的几何中，每一点的几何特性随着每一点的曲率而改变；所谓测度就是空间的曲率。因为测度是数学中的一个重要概念，在这里，结合在黎曼空间中测度两点间的距离问题，作简要的介绍。

我们知道，在平面上引进了直角坐标系 Oxy 后，如果两点间的坐标差是 Δx 和 Δy，那么这两点之间的距离公式就是

$$S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\,。$$

在三维空间里同样有

$$S=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2}\,。$$

在 n 维空间里也同样有

$$S=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}\,。$$

由于黎曼几何中关于连结两点的一切曲线中以线段为最短，所以关于求两点间距离的方法应该和上面所讲的方法是

相同的。但这只能在每个点邻近的无限小的区域里才是这样的。因此，在 n 维的黎曼空间里，在它的任意点 A 的邻近处，引进坐标 $x_1, x_2, \cdots x_n$ 以后，从点A到无限邻近的点 B 的距离就由下面的公式得出

$$ds=\sqrt{dx_1^2+dx_2^2+\cdots+dx_n^2}\text{。}$$

这里 $dx_1, \cdots dx_n$ 是点A和 B 的坐标的无限小的差。可以看出，从点 A 到任意邻近点 B 的距离可以用和欧几里得几何相同的公式求出，所不同的只是比点 B 到点 A 的邻近程度具有比较高的精确度。就是

$$S(\Delta x)=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}+\varepsilon\text{。}$$

这里 ε 是比第一项更为微小的量，而且当坐标差 $\Delta x_1 \cdots \Delta x_n$ 越小的时候，它也越小。

这就是黎曼空间测度距离的意义。黎曼测度和欧氏度量的差异在于：这种法则只在每个已知点邻近才成立。

曲线的长度是由它的无限邻近的点之间的无限小距离求和而得出，这就是说由长度的微分 ds 沿曲线求积分而决定，这正是沿曲线使用微小(无穷小)尺度来决定长度的严格的解析表示。关于微分和积分的概念详见本书后面第八章。

从上面的介绍中，我们可以看到在黎曼几何中使用欧氏几何关系的时候，只是在每一个无限小的区域内成立，但是并非精确地成立，区域越小，精确性越大。就是说，在无限小的区域里才具有欧几里得式的距离测量的抽象空间的观念。当空间中的距离按照这种法则测量的时候，这空间就叫做黎曼

空间，这种空间的几何就叫做黎曼几何。因此，正象前面已提到过的，黎曼空间是在"无限小范围"的欧几里得式的空间。

上面已经在关于罗氏几何的讨论中知道，现实空间只是在和天文尺度相比不大的区域里才是欧几里得式的，区域越小，欧氏几何就越精确地成立。在很大的尺度里的几何学已经和欧几里得几何学有差异了。但是，黎曼几何却是对于任何在无限小范围里的欧几里得式的几何。

黎曼空间和欧氏空间的另一差别是，欧氏空间是均匀的、无曲率的，图形可以在其中自由地移动而不改变它各点之间的距离，而黎曼空间就其本身的性质来说是不均匀的，因此在这个空间里就不能自由地移动图形而使它各点间的距离不改变。

(七)

近代黎曼几何在广义相对论里得到了重要的应用。在物理学家爱因斯坦的广义相对论中的空间几何就是一种黎曼几何。爱因斯坦在狭义相对论里主要和基本的命题是：空间和时间有不可分割的密切关系。而在广义相对论里放弃了关于时空的均匀性的观念，他认为时空只是在充分小的区域里以一定的近似性而均匀的，但是整个却不是均匀的，只是在微小的区域内以一定的近似性而均匀的时空的观念。在物理学中的这种解释，恰恰是和"在无穷小范围内"欧氏几何式的黎曼空间的观念相似的。这个广义相对论里的时空就可以解释为一种黎曼空间。

此外，黎曼几何在数学中也是一个重要的工具。它不仅

是微分几何的基础，也应用在微分方程、变分法和复变函数论等方面。

黎曼几何和欧氏几何、罗氏几何是三种各有区别的几何。这三种几何学各自所有的命题都构成了一个严密的公理体系，各公理之间满足和谐性、完备性和独立性。因此这三种几何都是正确的。在我们这个不大不小不近不远的空间里，也就是在我们的日常生活中，欧氏几何学是适用的；在宇宙空间中（或在原子核世界中）罗氏几何更符合于客观实际；在地球表面研究航海、航空等实际问题中，黎氏几何就更适用了。

七　坐标法——解析几何学

解析几何学的创立

(一)

十六世纪以后，由于生产和科学技术的发展，天文、力学、航海等方面都对几何学提出了新的需要。比如，德国天文学家刻卜勒（1571-1630）发现行星是绕太阳沿着椭圆轨道运行的，太阳处在这个椭圆的一个焦点上；意大利物理学家伽利略（1564-1642）发现投掷物体是沿着抛物线运动的。这些发现都涉及到圆锥曲线，这就要求对圆锥曲线进行深入的研究。要研究这些比较复杂的曲线，原先的一套方法显然已不适应了。这就导致了解析几何学的创立。

1637年，法国的哲学家和数学家笛卡儿发表了他的著作《方法论》，这本书后面有三篇附录，一篇叫《折光学》，一篇叫《流星学》，还有一篇叫做《几何学》。当时，“几何学”这个词，并不专指现在的“几何学”来说的。它只是和“数学”一词同一个意思，就象我国古代“算术”和“数学”同一个意思一样。笛卡儿的《几何学》共分三卷，第一卷讨论尺规作图，第二卷是曲线的性质，第三卷是立体和“超立体”的作图。第三卷实际是

代数问题，探讨方程的根的性质。后世的数学史家和数学工作者都把笛卡儿的《几何学》作为解析几何学的起点。

(二)

从笛卡儿的《几何学》中可以看出，笛卡儿的中心思想是建立起一种“普遍”的数学，把算术、代数和几何统一起来。他设想，把任何数学问题化为一个代数问题，再把任何代数问题归结到去解一个方程式。

为了实现上述的设想，笛卡儿从天文和地理的经纬制度出发，指出平面上的点和实数对(x, y)的对应关系。比如前面讲的圆锥曲线就可以和代数里的含x、y的二元方程$F(x,y)=0$相对应。对于这类二元方程，满足它的x、y的值有无穷多个，当x变化的时候，y值也跟着改变，x、y不同的数值可以确定平面上许多不同的点，因此便构成了一条曲线。这样，就可以用代数的方法研究曲线的性质。这就是解析几何的基本思想。

(三)

具体说，平面解析几何的基本思想有两个要点：

第一，在平面建立坐标系，一点的坐标，就可和一组有序的实数对相对应。

第二，在平面上建立了坐标系之后，平面上的一条曲线就由带两个变数的一个代数方程来表示。

从这里可以看到，运用坐标法不仅可以把几何问题通过代数的方法解决，而且还把变量、函数以及数和形等重要概念密切联系起来。

什么是变量呢？变量就是指在数学问题的讨论过程中，可以取不同数值的量。有了变量这个概念，就有可能把运动现象用数字来加以描述了。变量和变量之间有互相依赖的关系，比如，变量 x 可以在某个范围内任意取值，而依照一定法则对于 x 的每一个值，变量 y 都有一个或多个值和它对应。这种对应关系叫做"函数"关系，变量 y 叫做变量 x 的函数，x 叫自变量，y 叫因变量。同时把 x 的变化范围叫做定义域，把和 x 对应的 y 的值叫做函数值。

（四）

解析几何的产生并不是偶然的。在笛卡儿写《几何学》以前，就有许多学者研究过用两条正交直线作为一种坐标系；也有人在研究天文、地理的时候，提出了一点的位置可由两个"坐标"（经度和纬度）来确定。这些都给解析几何的创建以很大的影响。

在数学史上，一般认为和笛卡儿同时代的法国业余数学家费尔马也是解析几何学的创建者之一，应该分享这门学科创立的荣誉。

费尔马是一个业余从事数学研究的学者，对数论、解析几何、概率论三个方面都有重要贡献。他性情谦抑，好静成癖，对自己所写的"书"无意发表。但从他的通信中知道，他早在笛卡儿发表《几何学》以前，就已写了关于解析几何的小文，那时候，他就有了解析几何的思想。只是直到1679年，费尔马死后一段时间，他的思想和著述才从给友人的通信中公开发表出来。

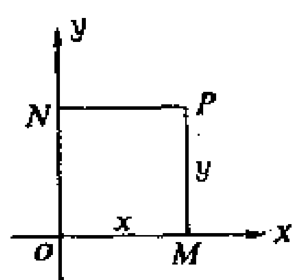
笛卡儿的《几何学》，作为一本解析几何的书来看，是不完整的，但是可贵的是引入了新的思想，为开辟数学新园地作出了贡献。

解析几何学的基本内容

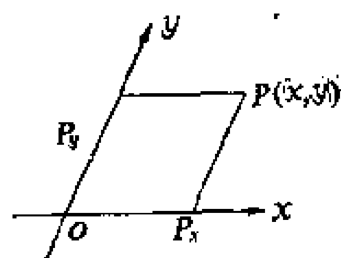
（一）

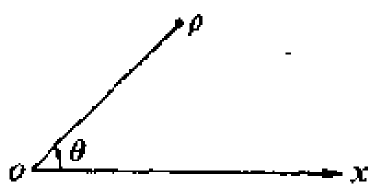
在解析几何学中，首先是建立坐标系。

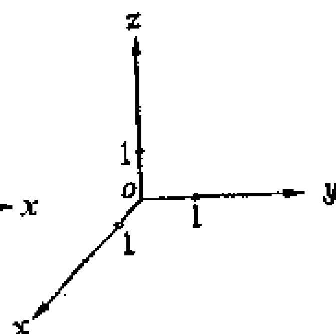
从下图可以看到，取定两条互相垂直的、具有一定方向和度量单位的直线，叫做平面上的一个直角坐标系 oxy。利用坐标系可以把平面内的点和一对实数 (x, y) 之间建立起一一对应的关系，因此，就把 (x, y) 叫做一点的直角坐标。



除了直角坐标系以外，还有斜坐标系（坐标轴不是互相垂直的，如下面左边的图所示）。另外还有极坐标系（如下面中间的图所示），空间直角坐标系（如下面右边的图所示）等等。在空间的坐标系中还有球坐标和柱面坐标。

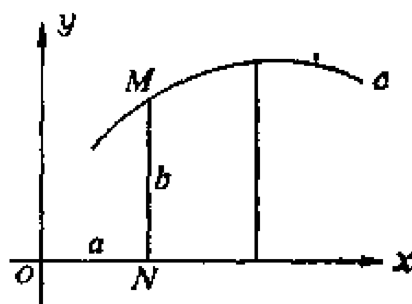






（二）

在平面坐标系中，如下图所示，有一条曲线，在横坐标轴上取 $x=a$，确定 N 点，由点 N 作横坐标轴的垂线 NM，这条垂线和曲线 c 相交于 M，这点的横坐标 $x=a$，纵坐标 $y=b$。这就是说，平面上给定的曲线的每一点的横坐标和纵坐标是由带两个变数的方程 $F(x,y)=0$ 联系着的。



如果对 y 来解这个方程，就可以表示成 $y=f(x)$，（y 是 x 的函数）。反过来，平面上点的横坐标和纵坐标之间满足上述两种方程形式之一，都可以把这个方程看作表示这平面上曲线的方程。

实际上，我们可以任意选定了 x 的值，就可以通过上述方程得到相应的 y 的值，并可在平面上画出一点对应于这些坐标，然后给横坐标一个不大的增量，我们得到纵坐标的一个新数值及平面上的另一点，这样下去，依次得到的点分布得越稠密，在连续变更横坐标的时候，就得到连续的点列，构成平面上的曲线。

（三）

把几何对象和数、几何关系和函数之间建立了密切的联系之后，就可以对空间形式的研究归结成比较成熟也容易驾驭得多的数量关系的研究了。

在解析几何中，这二者的关系举几例对照如下：

几何	代数
在平面上一点 p_1，	一组实数(x, y)，
平面上任取两直线：	两个二元一次方程式：
l_1	$a_1x+b_1y+c_1=0$，(a_1，b_1，c_1 均为实数，a_1 及 b_1 不同时为零)
l_2	$a_2x+b_2y+c_2=0$；(a_2，b_2，c_2 均为实数，a_2 及 b_2 不同时为零)
已知圆心 O 和半径，作圆；	已知(a, b)和 r 可得二元二次方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$；
设直线 l_1 和 l_2 交于一点 c，	解联立方程 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0; \end{cases}$
设直线 l_1 和$\odot O$交于两点。	解联立方程 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ (x-a)^2+(y-b)^2=r^2。 \end{cases}$

用这种方法研究几何学，通常叫做解析法。这种解析方法不但对于解析几何是重要的，就是对于几何学的各个分支的研究也是十分重要的。

解析几何的创立，引入了一系列新的数学概念，特别是把

变量引入数学，就使数学进入一个新的发展时期，这就是变量数学的时期。解析几何在数学发展中起了推动的作用。恩格斯对此曾作过正确的评价："数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学，有了变数，微分和积分也就立刻成为必要的了，……"（《自然辩证法》人民出版社 1971 年版第 236 页）

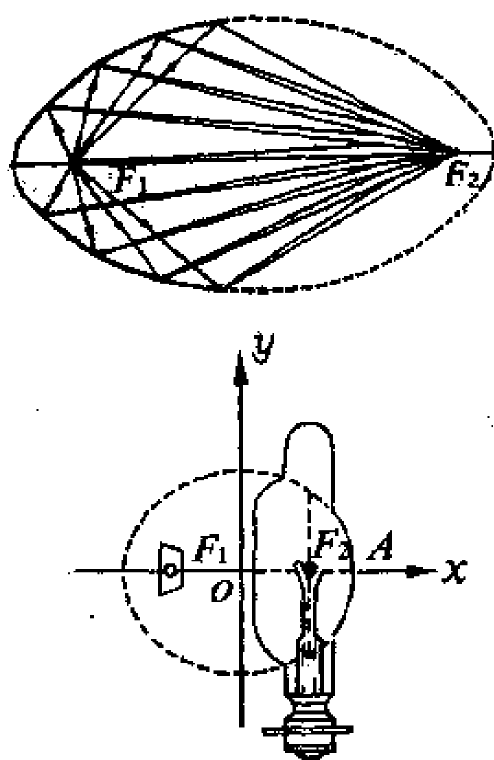
解析几何学的应用

（一）

解析几何又分做平面解析几何和空间解析几何。

在平面解析几何中，除了研究直线的有关性质以外，主要是研究圆锥曲线（圆、椭圆、抛物线、双曲线）的有关性质。

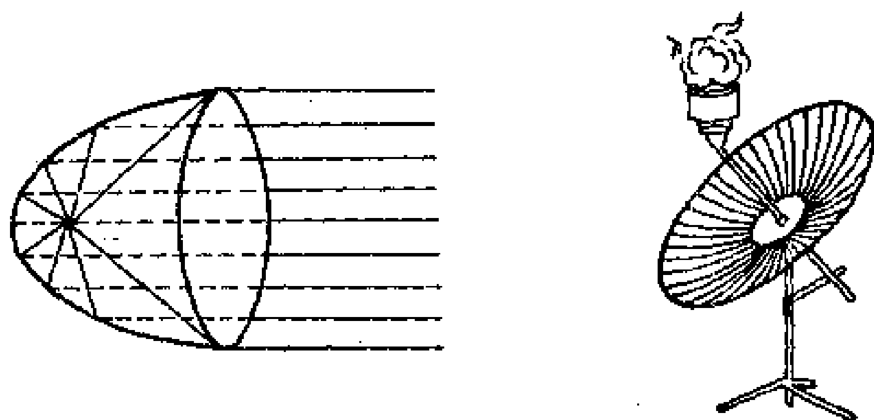
在空间解析几何中，除了研究平面、直线有关性质外，主要研究柱面、锥面、旋转曲面。



椭圆、双曲线、抛物线的有些性质，在生产或生活中被广泛地加以应用，这里可以举一些例子来加以介绍。看一下右边上面这张图，如果光源在椭圆镜的一个焦点上，那么光线经反射后都聚集在另一个焦点上。椭圆的这个性质，可以应用到电影放映机上。如右边下

图所示，电影放映机上的聚光灯泡的反射面是椭圆面，焦点 F_2 处是灯丝，为了使影片门获得最强的光，影片门应装在椭圆的另一个焦点 F_1 处。

抛物线也有类似的性质。例如把一个光源放在抛物镜的一个焦点上，光线经过反射后一定平行于轴，如下面左边的图



所示。反过来，一束平行光线经过抛物面的反射，都聚在它的焦点处。上面右边的图是一个太阳灶示意图，太阳灶就是根据这个原理制成的。

抛物线对声波、电磁波的反射作用，跟对光线的反射作用是相同的。因此雷达通讯和卫星地面站的天线都设计成抛物面的形状，现在连射电天文望远镜也采用这种形状的设计，实践证明，这样的设计可以保证发射或接收有良好的方向性。

(二)

总起来说，解析几何运用坐标法可以解决两个基本问题：第一是满足给定条件点的轨迹，通过坐标系建立它的方程；第二是通过方程的讨论，研究方程所表示的曲线的性质。

怎样运用坐标法呢？运用坐标法解决上述问题的步骤是

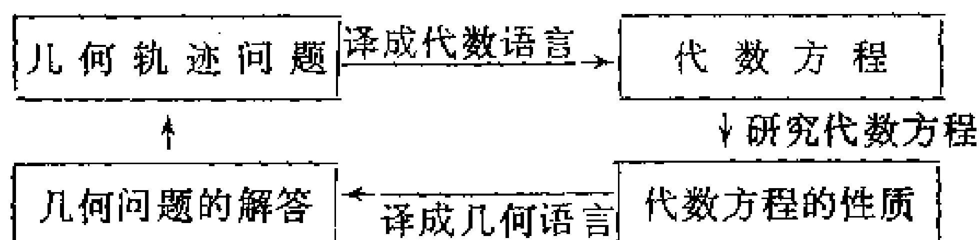
这样的：

首先，在平面上建立坐标系，把已知点的轨迹的几何条件“翻译”成代数方程；

其次，运用代数工具对方程进行研究；

最后，把代数方程的性质用几何语言叙述，从而得到原先几何问题的答案。

下面可以用图示来表示上面几个步骤的程序：



坐标法的思想促使人们运用各种代数的方法解决几何问题。先前被看作是几何学中的难题，一旦运用代数方法后就变得平淡无奇了。

坐标法对近代兴起的数学的机械化证明也提供了有力的工具。

所谓数学的机械化证明，就是通过计算机对数学的某些领域如初等几何等方面的定理进行证明。

八　微积分学

微积分学的创立

（一）

客观世界的一切事物，小至粒子，大至宇宙，始终都在不停地运动和变化着，因此，在数学中引进了变量的概念，就有可能把运动现象用数字来加以描述了。

在《坐标法——解析几何学》那章里，我们已经简要地介绍了变量和函数这些基本概念，由于函数概念的产生和采用，也由于科学技术发展的需要，一门新的数学分支就继解析几何之后产生了。这就是微积分学的创立。

微积分学这门学科在数学发展中的地位是十分重要的，可以说它是继欧几里得几何之后，全部数学中的一个最大的创造。

（二）

微积分学是微分学和积分学的总称，在后面的具体内容中，我们将要对微分和积分的概念作出解释，这里先介绍一下这门学科创立的过程和它的基本思想。

从微积分成为一门学科来说，是在十七世纪，但是，微分

和积分思想在古代就已经产生了。

拿积分的思想来说，公元前三世纪希腊的阿基米得（前287-前212）在研究解决抛物弓形的面积、球和球冠面积、螺线下面积和旋转双曲体的体积的问题中，就隐含着近代积分学的思想。

拿作为微积分学的基础的极限论来说，早在古代就已有比较清楚的论述。比如我国的庄周(约前369-约前286)所著的《庄子》一书的“天下篇”中，记有“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”三国时代的刘徽在他的割圆术中提到“割之弥细，所失弥小，割之又割，以至于不可割，则与圆周合体而无所失矣。”这些都是十分朴素的、也是很典型的极限概念。

到了十七世纪，有许多科学问题需要解决，这些问题也就成了促使微积分产生的因素。归结起来，大约有四种主要类型的问题：第一类问题是研究运动的时候直接出现的，也就是要求出即时速度的问题。第二类问题是求曲线的切线的问题。第三类问题是求函数的最大值和最小值问题。第四类问题是求曲线长、曲线围成的面积、曲面围成的体积、物体的重心、一个体积相当大的物体作用于另一物体上的引力。

十七世纪的许多著名的数学家、天文学家、物理学家都为解决上述几类问题作了大量的研究工作，如法国的费尔马、笛卡儿、罗伯瓦（1602-1675）、笛沙格（1591-1661）、英国的巴罗、瓦里士(1616-1703)、德国的刻卜勒、意大利的卡瓦列利(1598-1647）等人都提出过许多很有建树的理论。为微积分的创立作出了贡献。

(三)

十七世纪下半叶，在前人工作的基础上，英国的牛顿和德国数学家莱布尼茨分别在自己的国度里研究和完成了微积分学的创立工作。虽然这只是十分初步的，但是，应该承认，他们各自独立地建立起微积分学的体系。他们的最大功绩是把两个貌似不相关的问题联系起来，一个是切线问题(微分学的中心问题)，一个是求积问题(积分学的中心问题)。

牛顿研究微积分着重于从运动学来考虑，莱布尼茨却是侧重于从几何学来考虑的。

牛顿在1671年写了《流数法和无穷级数》，这本书直到1736年才出版，他在这本书里指出，变量是由点、线和面的连续运动产生的，否定了以前自己认为的变量是无穷小元素的静止的集合。他把连续变量叫做流动量，用v, x, y, z，等表示。把这些流动量的导数叫做“流动率”，或者叫做流数，或叫做“速度”、“迅度”。时间是所有流动量的自变量，$\dot{v}, \dot{x}$，……相当于莱布尼茨的$\frac{dv}{dt}$，$\frac{dx}{dt}$，……他还使用了“刹那”(或译成“瞬”)这种名称。他在另一部著作《曲线求积论》中又重新解释了他新使用的符号。

牛顿在流数术中所提出的中心问题是：第一已知连续运动的路径，求给定时刻的速度(也就是微分法)；第二已知运动的速度求给定时间内经过的路程(也就是积分法)。

德国的莱布尼茨是一个博学多才的学者，1684年，他发表了现在世界上认为是最早的微积分文献，这篇文章仅有6页纸，内容并不丰富，标题很长而且很古怪，叫做“一种求极大极

小和切线的新方法，它也适用于分式和无理量，以及这种新方法的奇妙类型的计算”。就是这样一篇说理也颇含混的文章，却有划时代的意义。它已含有现代的微分符号和基本微分法则。1686年，莱布尼茨发表了第一篇积分学。他是历史上最大的符号学者之一。他所创设的微积分符号，远远优于牛顿符号，这对微积分有极大的影响。现在还在通用的符号如dx、dy、$\int$，就是当时莱布尼茨精心选用的。

(四)

微积分学的创立，极大地推动了数学的发展，过去很多初等数学束手无策的问题，运用了微积分，往往就会迎刃而解，显示出微积分学非凡的威力。

前面已经提到，一门学科的创立绝不是某一个人的业绩，它必定是经过多少人的努力之后，在积累了大量成果的基础上，最后由某一个或几个人总结完成的。毫不例外，微积分学也是这样。

不幸的是，由于人们在欣赏微积分的宏伟功效之余，在提出谁是这门学科的创立者的时候，竟然引起了一场轩然大波，造成了欧洲大陆的数学家和英国数学家的长期对立。英国数学在一个时期里闭关锁国，囿于民族偏见，过于拘泥在牛顿的“流数术”中停步不前，因而数学发展整整落后了一百多年。

其实，他们是自己独立研究，在大体上相近的时间里先后完成的。比较特殊的是牛顿创立微积分要比莱布尼茨早10年，但是正式公开发表微积分这一理论，莱布尼茨却要比牛顿发表早三年。他们的研究都各有长处，也都各有短处。那时候，

由于民族偏见，关于发明优先权的争论竟从 1699 年始延续了一百多年。

应该指出，这是和历史上任何一项重大理论的完成，也要经历一段时间一样，牛顿和莱布尼茨的工作也都是很不完善的。他们在什么是无穷小量这个问题上，其说不一，十分含糊。牛顿的“刹那”(或“瞬”)或无穷小量，有时候是零，有时候不是零而是有限的小量；莱布尼茨的 dx, dy 也是不能自圆其说的。这些基础方面的缺陷，使得牛顿被神学家贝克莱(1685-1753)猛烈攻击，莱布尼茨被尼文太(1654-1718)竭力反对。

任何新兴的、具有无限前途的科学成就都吸引着广大的科学工作者，瑞士的雅科布·贝努利(1654-1705)和他的兄弟约翰·贝努利 (1667-1748)、欧勒、法国的拉格朗日(1736-1813) 等数学家都集中力量去解决牛顿和莱布尼茨遗留下来的问题，为微积分的发展作出了极为可贵的贡献。

微积分的基本内容

(一)

研究函数，从量的方面研究事物运动变化是微积分的基本方法。这种方法也叫做数学分析。

本来，从广义上说，数学分析包括微积分、函数论等许多分支学科，但是现在一般已习惯于把数学分析和微积分等同起来，数学分析成了微积分的同义词，一提数学分析就知道是指微积分，有时候也叫做分析数学，或者叫分析。

（二）

微积分的基本概念和内容有哪些呢？前面已经说过，微积分学是微分学和积分学的总称，也就是说它包括两大部分。

微分学的主要内容包括：极限理论、导数、微分等。

积分学的主要内容包括：定积分、不定积分等。

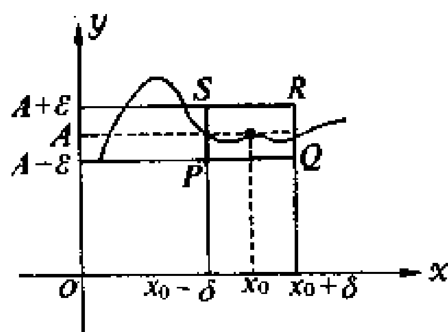
微　分　学

（一）

极限论是微积分最基本的理论。什么叫做极限呢？举例来说，对于一个函数 $f(x)$，当自变量 x 越来越接近 x_0 的时候，如果函数值 $f(x)$ 也随着越来越接近一个定数 A，我们就说这个 A 是函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限。现在用数学的记号写出函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的附近（但可能除掉 x_0 点本身）有定义，又设 A 是一个定数，如果对任意给定的 $\varepsilon>0$，一定存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 的时候，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，我们就把 A 叫做函数 $f(x)$ 在 x_0 点的极限，记成

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A,\ \text{或者记成} f(x)\to A(x\to x_0)。$$

从右图可以看出，当“$0<|x-x_0|<\delta$”，也就是 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$，$x\neq x_0$ 的时候，总有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 的几何意义。表明只要当 $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ 或者 $x\neq x_0$ 的时候，曲线 $f(x)$



总在两条直线$y=A+\varepsilon$,和$y=A-\varepsilon$之间,或者说曲线$y=f(x)$的图形是在矩形 $PQRS$ 内。

(二)

我们知道，运动变化状态可分均匀变化和非均匀变化两类。比如,车刀在自动走刀中的运动就是均匀变化的;但是一个物体距离地面某个高度自由下落（或者以初速度不为零下落),在它的下落运动过程中，每时每刻的速度是不断变化着的。又如，由试验得出一公斤铁由 0°C 加热到 T°C 的时候，它所吸收的热量 Q 由

$$Q=0.1053T+0.000071T^2\text{（千卡）}\quad(0\leqslant T\leqslant 200)$$

来确定,可见铁在每升高 1°C 的时候，它所吸收的热量(也就是比热)不是均匀变化着的。总之,均匀变化和非均匀变化这两种运动变化状态在客观现实中的例子很多,举不胜举。

对均匀变化,如匀速运动问题,如果已知时间和距离求它的速度,只须用除法就可以了。就是$\frac{s}{t}=v$ 。s 表示距离,t 表示时间,v 表示速度。但对非均匀变化问题，用除法就不行了。比如,要求出上例中物体在某一时刻的速度(就是即时速度)和求铁在温度升高 10°C、13°C……时的比热是多少? 现在叫做即时变化率,仅用初等数学的运算方法,解决是很困难的。为了适应生产实践的需要,数学也由初等发展到高等,微积分的创立说明牛顿在 1665 年就是从运动学的观点出发的。

怎样确定和计算变化率呢?就上例从运动学观点来说，要求物体下落的即时速度，必须从这一瞬时刻前后的运动过程去考察。为此，我们可从已知物体运动的规律中，先考虑

某个时刻(t_0) 以及跟这个时刻相邻的一个时刻 $t_0+\Delta t$，物体所运动的距离的差（就是距离的改变量，$\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$)，除以相邻多大时刻(就是某个时刻的改变量 Δt)，从而得出物体在这一时刻改变量的平均速度。用公式来表示，就是

$$\frac{\text{距离改变量}}{\text{时间改变量}}=\frac{\text{相邻时刻物体所运动的距离之差}}{\text{相邻多大时刻}}=\text{平均速度}$$

$$=\text{均匀变化的变化率。}$$

如用数学符号表示，就是

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0-\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}=v_{\circ}$$

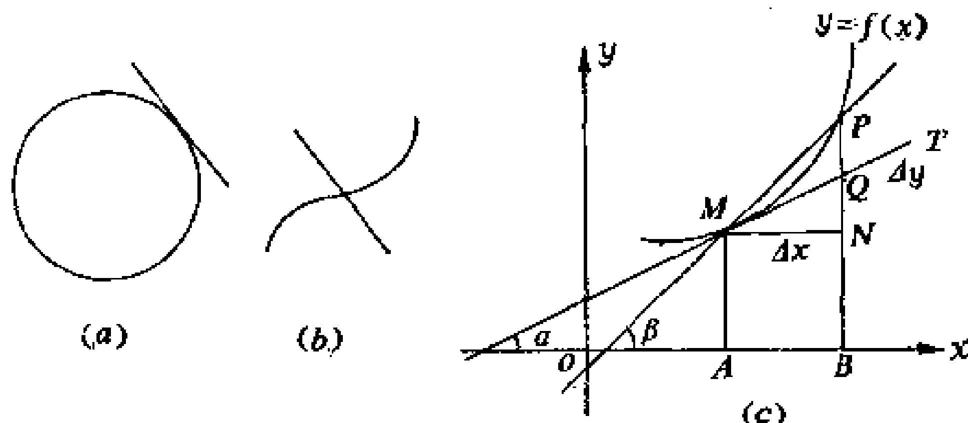
上面所讲的这个思想是假设物体在相邻的这一时刻内是作均匀变化的，就是在这一段时刻内的每时每刻的速度都相等。然而问题实质上毕竟是非均匀的。当相邻时刻就是某个时刻的改变量很小的时候，它的平均速度就越接近我们所理想的某个时刻的即时速度。当然还不能精确地等于某个时刻的即时速度，可是已相差无几了。

当某个时刻的改变量是无穷小的时候，也就是 $\Delta t\to 0$，那么这平均速度的极限就是某个时刻的即时速度。这个转化就是一个飞跃，是一个量变到质变的过程。这种求某个时刻的即时速度就是求某个时刻的即时变化率，在数学上把它叫做导数。导数可以看作是从研究均匀变化的变化率到研究非均匀变化的变化率时候除法的发展，是把平均变化的变化率取极限转化而来的。用数学的符号来表示就是

$$f'(x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_{t=t_0}。$$

(三)

现在我们再来举例，谈谈曲线和直线的位置关系，也就是切线问题。我们看一看下面的几幅图，在左边的(*a*)图中，曲



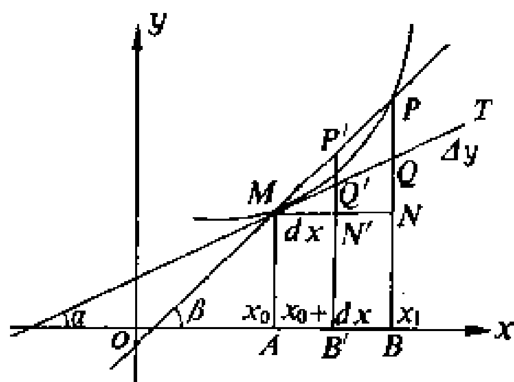
(*a*) (*b*) (*c*)

线(圆)和直线只有一个交点，这条直线就是这个圆的切线。但是这种概念不能随意推广，它只适用于圆的切线，例如，中间这幅(*b*)图中，曲线和直线也只有一个交点，但直线不是曲线的切线。

关于切线的概念，我们先分析一下上面这组图中右边的(*c*)图。曲线在某点的切线是由过某点的割线转化而来的。曲线 $y=f(x)$在点 M 的切线 MT 是由割线 MP 转化而来的。就是点P 沿曲线 $f(x)$无限接近点 M 的时候，割线 MP 的极限位置MT就是在点M的切线。不难看出，割线的倾斜程度是 $\frac{PN}{MN}=\mathrm{tg}\beta$，一当点$P$ 沿曲线无限接近点M的时候，就是 MN 趋近于零，PN也趋于零，这时候

$$\mathrm{tg}\beta=\lim_{MN\to 0}\frac{PN}{MN}=\lim_{MN\to 0}\frac{PB-MA}{MN}=\mathrm{tg}\alpha。$$

这也就是割线转化成切线。这时候，当然割线的斜率也必然转化成切线的斜率$\operatorname{tg}\alpha$。所以，导数的意思从几何上来讲就是某点的切线的斜率。从图上还可以看到，当点B越接近点A的时候（记为Δx），P点就越靠拢于M点，这时候QP比NQ趋近于零的速度要快，如下图所示，设想直角三角形$MN'Q'$是M点的“放大”，MT是曲线$y=f(x)$在点M的切线，它的倾角是α，MN'作为dx的几何形象，当点B无限地接近于点A，就是相应地坐标x_1变到x_0，它的几何形象$dx\to 0$，从而对应地几何形象$NP=\Delta y\to N'P'\approx N'Q'=dy\to 0$，莱布尼茨最早提出特征三角形就是以$dx$、$dy$、$ds$为边的直角三角形，在直角三角形$MN'Q'$中边角关系就有$dy=\operatorname{tg}\alpha\cdot dx$，这就是微分。



$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

叫做$\overset{\frown}{MP}$的微分。通俗地说，微分就是研究函数在某一点附近的函数增量的线性主要部分，或者说是切线的纵标对应增量。如图中点A的附近点B'的函数增量是$N'P'$的线性主要部分$N'Q'=dy$，可见微分和导数有密切的联系，由上可知：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=\operatorname{tg}\alpha=M\text{ 点的切线斜率}=M\text{ 点的}$$

导数。

所以导数又叫做微商，原因就在这里。

导数的符号有 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$， $\left.y'\right|_{x=x_0}$， $\left.f'(x)\right|_{x=x_0}$ $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}$ 等。

函数$y=f(x)$的微分的符号有dy，$df(x)$等，这些符号可以写成$dy=f'(x)dx$，或者$df(x)=f'(x)dx$。必须指出，符号$\frac{dy}{dx}$，y'，$f'(x)$、$\frac{df(x)}{dx}$等表示导函数，它和导数是有区别的，但是二者又密切联系，前者是常数，后者是函数；当求出导函数y'可把$x=x_0$代入，那么就得到导数$\left.y'\right|_{x=x_0}$。对于$\frac{d^2y}{dx^2}$，y''，$f''(x)$等叫做二阶导函数。同样$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=x_0}$，$\left.y''\right|_{x=x_0}$，$\left.f''(x)\right|_{x=x_0}$等叫做二阶导数。举例来说，如路程$s$对时间$t$的二阶导数的物理意义是加速度：$\frac{d^2s}{dt^2}=a$。对于$\frac{d^3y}{dx^3}$，$y'''$、$f'''(x)$、…$\frac{d^{(n)}y}{dx^n}$，$y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$叫做三阶导函数，…$n$阶导函数。但我们常常简单地叫做导数。

导数和微分从运算意义上来讲，dy和dx是同一关系的不同表达形式。就如同均匀变化中的乘法和除法的关系。从物理意义上来讲，如果导数是运动的即时速度，那么微分就是运动的即时路程。它们都是运动局部(瞬时)状况的反映。顺便提一下，初等函数的导函数仍然是初等函数。

导数和微分对于研究函数的性质、求极值和近似计算等起着很大作用。

积 分 学

(一)

导数和微分统称做微分法，它是反映和刻画运动非均匀变化的瞬时状况，是作用于函数的一种数学运算，这是问题的一面，另一面同运动变化的瞬时状况相逆的是运动变化的总体状况。怎样研究运动的总体状况，这就存在和微分运算的相反的一种运算。就象我们已经熟知的一样：加法的逆运算是减法，乘法的逆运算是除法，乘方的逆运算是开方等等。

那么，微分的逆运算是什么呢？就是求反导数，也就是积分学。

例如，某物体的运动规律是 $s=f(t)=\frac{1}{2}at^2+v_0t+s_0$（$t$ 是时间，s是路程，v_0是初速度，s_0是初始的距离）。那么对 $f(t)$求导数，就得到这个物体在任一时刻 t 的即时速度，

$$v=f'(t)=at+v_0,$$

可是在力学里往往存在有相逆的问题。就是已知物体在任一时刻 t 的速度 $v=v(t)$，当然这是一个非均匀变化问题，而要去求这个物体的运动规律，从数学上来讲，这是个相反的问题，就是要去求物体的运动路程 s 和时间 t 的依赖关系：$s=f(t)$，使它的导数 $f'(t)=v=v(t)$，显然，这正是微分学的逆问题，也就是求反导数。象这样的逆问题的求法，叫做不定积分法。如上例的求法，

若已知 $$v=v(t)=at+v_0,$$

那么

$$s=\int v(t)\,dt=\int(at+v_0)\,dt=\frac{1}{2}at^2+v_0t+C_{\circ}$$

（其中C是常数，可以写成 s_0）

在数学上我们把求反导数，就是已知函数 $f(x)$ 的任意原函数$F(x)+C$ 叫做 $f(x)$的不定积分，用数学符号写成

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C_{\circ}$$

有关不定积分的计算，除去用积分基本公式外，还有换元积分法、分部积分法和其他方法、一些技巧等。这里也不介绍了，在实际工作中，可利用现成的积分表来计算。

积分学中除去不定积分还有定积分，前者是牛顿强调的一个方面，而后者是通过“微分的无限积累”去研究运动变化的总体状况。

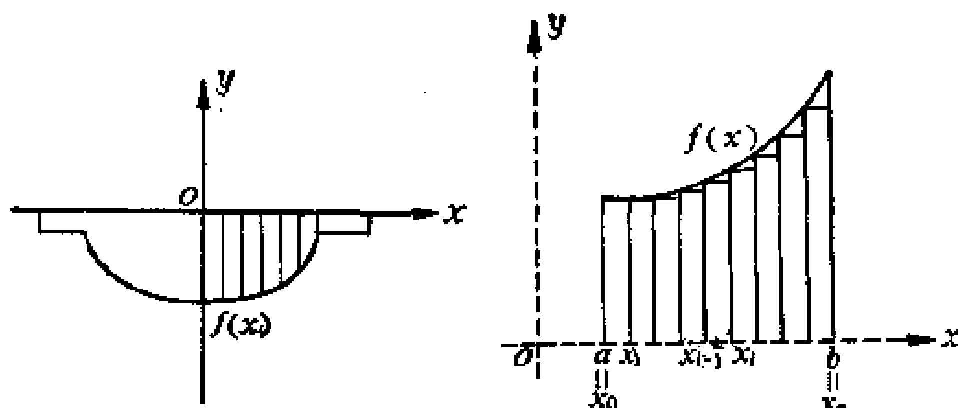
定积分是无穷小演算的一种运算。早在公元前五世纪，希腊数学家利用大量微小部叠合而成一个物体，计算出锥体的体积是等底等高的柱体体积的三分之一。阿基米得和我国古代数学家就利用“穷竭法”计算面积和体积。

作为现在学习微积分学的顺序来讲，微分学是在积分学之前，然而从积分学的萌芽、思想方法和起点在历史上是远先于微分学的。

（二）

下面就积分学的思想方法作简单介绍。

例如计算平面图形的面积，在生产实践中，既存在大量的直边的图形，如三角形、四边形、梯形等。也存在大量的曲边



的图形，如上图所示。对于前者，在初等数学里是以长方形面积为基础，利用分割拼补的方法来计算各种直边图形的面积，但是用这种方法来计算曲边形的面积就比较困难了。在初等数学中能求圆以及和圆有关的面积，对其他曲边图形的面积，可以在高等数学中用积分方法去求，具体地采用“微元法”，就是把原图形细分成很多小曲边梯形 S_1、S_2、S_3、…S_n，由于分得很细，所以每个小曲边梯形的高度变化很小（如第 i 个小曲边梯形的底是x_i-x_{i-1}，高可近似地作为$f(x_{i-1})$），也就是把它看作是个小矩形。而矩形面积是底乘高，分割出每小块曲边梯形面积的近似值分别是 $f(x_0)(x_1-x_0)$、$f(x_1)(x_2-x_1)$、$f(x_2)(x_3-x_2)$、…$f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$、…$f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$，这是将总体量（未知）先通过“化整为零、近似代替”，得出每一局部量的近似值，假设仅仅停留在这一步，那仍然是有限个局部量的近似值，它的和：

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)+\cdots$$
$$+f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}),$$

也只是总体量的近似值。假若当 n 充分大的时候，严格的数学语言是：n 趋向无穷大的时候，用符号 $n\to\infty$ 表示，最大的 x_i-x_{i-1} 的距离趋近于零用符号 $\|x_i-x_{i-1}\|\to 0$ 表示。这就是无限地细分：$f(x_0)(x_1-x_0)$，$f(x_1)(x_2-x_1)$，$f(x_2)(x_3-x_2)$，…，$f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})$…$f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})$…再无限积累起来：

$$f(x_0)(x_1-x_0)+f(x_1)(x_2-x_1)+f(x_2)(x_3-x_2)$$
$$+\cdots+f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})+\cdots+f(x_{n-1})(x_n-x_{n-1})+\cdots$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1}),$$

这时候，无穷项和的极限就转化成原曲边形面积的精确值：

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ (\text{或} \|x_i-x_{i-1}\|\to 0)}}\sum_{i=1}^{\infty}f(x_{i-1})(x_i-x_{i-1})=s。$$

这种“无限细分、无限积累”就是定积分，用符号记成：

$$s=\int_a^b f(x)dx$$

式中 $f(x)$ 叫被积函数，$f(x)dx$ 叫被积表达式，变量 x 叫做积分变量，a 和 b 分别叫做积分的下限和上限。区间 $[a,b]$ 叫做积分区间，其中积分符号 $\int$ 就是字母 s 的拉长，在拉丁文中“和”字是 summa，英文中总和是 sum。

（三）

在这里，特别要提出牛顿和莱布尼茨的最大功绩，是把微分学中心问题（切线问题）和积分学中心问题（求积问题）勾通

起来，建立了一个公式，这个公式至今仍然叫牛顿-莱布尼茨公式：

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

$F(x)$是$f(x)$的任意一个原函数。

这个公式把计算一个函数的定积问题归结成寻求该函数的原函数问题，这个公式表达了客观现实中的微分学和积分学之间的深奥联系。

虽然牛顿、莱布尼茨在积分学上有巨大的贡献，但是还缺乏理论，直到十九世纪，法国数学家柯西(1789-1857)给出连续函数的积分的明确定义和它的存在性证明，就是在某些微积分书籍中指出的：第一，初等函数在某个定义域的区间上原函数一定存在，但不一定就是初等函数了。第二，如果函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，那么，$f(x)$在$[a,b]$上积分必然存在。也就是说，连续函数是可积的。相隔不久，黎曼却指出了不连续函数的积分，并给出了它的存在的必要充分条件，因此，和数极限的积分定义被叫做黎曼积分。随后法国的勒贝格(1875-1941)又发展了定积分定义，这点将在“实变函数论”里加以介绍。

(四)

以上我们所介绍的都是一元函数，对于二元函数以及多元函数也相应地有导数、微分和积分等，它们是对多个自变量函数的一种数学运算，但是和一元函数有区别。如，二元函数

$$z = f(x, y),$$

它的几何意义表示一个曲面。考虑函数z关于某个自变量的

导数叫做偏导数，有关于X的偏导数记成

$$f'_x(x,y), \quad 或者 \frac{\partial x}{\partial z}。$$

式中的∂是圆体的d，是偏导数符号，可读作偏或者 Round 。

黎曼积分概念可以推广到二元函数或者多元函数方面去，比如，求面密度不均匀的物体的质量而引入二重积分，它的主要方法也是"和的极限"。二重积分用 符号表示，就是

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy,$$

其中，D是积分区域。

多元函数的偏导数、重积分对于研究多元函数的性质、极值、近似计算、求体积、求质量等方面都很有作用，因此，在物理学、工程技术等方面应用十分广泛。

（五）

微积分学的建立和发展已经历了三百多年，形成了比较严密的体系。但是也有人提出，对于微分 dx 是变量 x 趋于零却又永远不到零的改变量，觉得很费解，而且 $dx=\Delta x$ 的替换也存在漏洞，因而感到经典的数学分析存在缺点和不足。

1968 年，美国人鲁滨逊(1918-1974) 写了一本«非标准分析»，在书中，他把经典的分析方法，也就是通常所说的潜无限法改变了。他以数理逻辑的方法推导出大于零而小于一切正数的无穷小量，认为是"复活了的无穷小"。现在数学界不少人对它进行研究和讨论，许多观点认为$\frac{dy}{dx}$不是$\frac{0}{0}$而仅仅是接近于零，也有不同的看法。这些研究和讨论都促进了数学分析的发展。

九　复变函数论

什么是复变函数?

(一)

复数的概念在中学的数学里就已经讲述了，复数的一般形式是

$$a+bi,$$

其中，i 是虚数单位，规定 $i=\sqrt{-1}$，a、b 是实数。

以复数作为自变量的函数就叫做复变函数。复变函数论主要研究复数域上的解析函数，解析函数是复变函数中的一类具有解析性质的函数，因此，复变函数论也叫做解析函数论。

(二)

在复变函数论里，把在 z_0 点的某一邻域之内的一切点都具有导数的那种函数叫做在 z_0 点解析的函数。

从函数的一般定义出发，如果根据已经给出的复数值 z，我们可以找出一种规律，使得可以得出复数值 w，我们就说 w 是复数 z 的函数。

对于每一复数 $z=x+yi$，可以用平面 xoy 上的点(x,y)来

表示，对于数 $w=u+vi$ 就用平面 uov（函数平面）上的点来表示。于是，从几何的观点看，复变函数

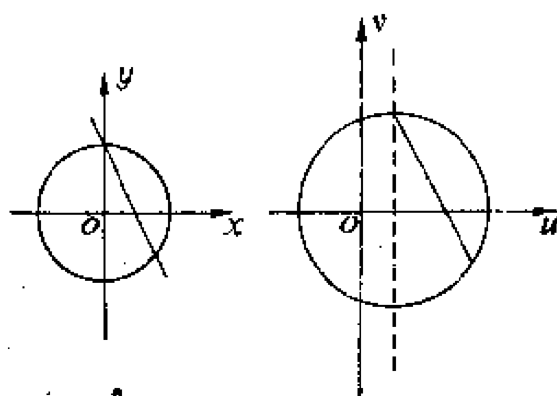
$$w=f(x)$$

在变数平面 xoy 上的点和函数平面 uov 上的点之间就建立了一个对应关系。也就是说，复变函数给变数平面到函数平面上建立了一个映象。在给定了一个复变函数和给定了两个函数

$$u=\varphi(x,y),\ v=\phi(x,y)$$

是等价的，显然有

$$w=u+vi$$
$$=\varphi(x,y)+\phi(x,y)i。$$



比如说，假设

$$w=z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi-y^2,$$

那么

$$u=\varphi(x,y)=x^2-y^2,\quad v=\phi(x,y)=2xy。$$

复变函数论的产生和发展

（一）

复变函数论产生于十八世纪，1774 年，欧勒在他的一篇论文中考虑了由复变函数的积分

$$\int f(z)dx$$

导出方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}。$$

比欧勒更早，法国数学家达兰贝尔(1717-1783)在他的关于流体力学的论文中，就已经得到了上面这两个方程。因此，后来有些书中提到这两个方程的时候，把它们叫做“达兰贝尔-欧勒方程”。

到了十九世纪，上述两个方程都由柯西和黎曼在研究流体力学的时候，对它作了更详细的研究，所以这两个方程更多的是被叫做柯西-黎曼条件，并且用柯西、黎曼的英文名字头C、R简写成“C—R条件”。

(二)

复变函数论的全面发展是在十九世纪，就象微积分的直接扩展统治了十八世纪的数学那样，复变函数论这个新的分支统治了十九世纪的数学。

十九世纪，数学家公认复变函数论是最丰饶的数学分支，并且叫做这个世纪的数学享受，也有人称赞它是抽象科学中最和谐的理论之一。

(三)

为复变函数论的创建做了最早期工作的是欧勒、达兰贝尔，法国的拉普拉斯(1749-1827)也随后研究过复变函数的积分。他们都是创建这门学科的先驱。

后来为这门学科的发展做了大量奠基工作的要算是柯西、黎曼和德国数学家魏尔斯特拉斯(1815-1897)。

柯西在他的论文《论虚限定积分》中讨论了定积分

$$\int_{x+yi}^{X+Yi} f(z)dz。$$

并且实质上推出了著名的柯西积分公式

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z_0}dt。$$

式中C是区域G的边界，而z_0是G内任意一点。柯西由这里开始，研究和建立了一套复变函数微分和积分的理论。

1851年，黎曼在他的论文中叙述了复变函数的理论，推广单值解析函数到多值解析函数。

魏尔斯特拉斯和柯西、黎曼不同，他完全摆脱了几何直观，以幂级数作工具，定义解析函数是可以展开成幂级数的函数。

近几十年来，复变函数论又有了很大的进展，魏尔斯特拉斯的学生、瑞典数学家列夫勒(1846-1927)、法国数学家彭加勒(1854-1912)、阿达玛(1865-1963)都做了大量的研究工作，开拓了复变函数论的更广阔的领域，为这门学科的发展作出了贡献。

(四)

复变函数论在应用方面，涉及的面很广，有很多复杂的计算都用它来解决。比如，在物理学上有很多不同的稳定平面场，所谓场就是每点对应有物理量(温度、速度、电势等)的一个区域，对它们的计算就是通过复变函数来解决的。

比较典型的应用例子，是俄国的茹可夫斯基(1847-1921)在设计飞机的时候，用复变函数论解决了飞机机翼的结构问题。他在流体力学和航空力学方面运用复变函数论也做出了贡献。

（五）

复变函数论不但在其他学科得到了广泛的应用，而且在数学领域里，许多分支也都应用它的理论。它已经深入到微分方程、积分方程、概率论和数论等学科，对它们的发展很有影响。

复变函数论的理论近年来也有了很大的发展。我国数学界的后起之秀杨乐(1939-)、张广厚在单复变函数的值的分布理论和渐近值理论的研究中，取得了具有世界水平的成果，他们的研究进一步充实了复变函数论的理论。

复变函数论的内容

（一）

复变函数论主要包括单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数论、留数理论、广义解析函数等方面的理论。

如果变量取某一定数值的时候，函数就有一个唯一确定的值，这个函数就叫做单值解析函数。比如，多项式就是这样的函数。

复变函数也研究多值函数。函数也可以是多值的，比如，$w=\sqrt{z}$，当 $z=1$ 的时候，函数值就可以是 $+1$ 或者 -1。黎曼曲面理论是研究多值函数的工具。由许多层平面（常常叫做叶片）安放在一起而构成的一种曲面叫做黎曼曲面。利用这种曲面，可以使多值函数的单值枝和枝点概念在几何上有个明显而非常直观的表示和说明。对于某一个多值函数，如果能作出它的黎曼曲面，那么，函数在黎曼曲面上就变成单值

函数。黎曼曲面理论是复变数域和几何间的一座桥梁，能够使我们把比较深奥的函数的解析性质和几何联系起来。近来，关于黎曼曲面的研究还对另一门数学分支学科拓扑学有比较大的影响，逐渐地趋向于探讨它的拓扑性质。

（二）

复变函数可以通过共形映象理论为它的性质提供几何说明。什么是共形映象呢？就平面上映象来说，设 $w=f(z)$ 是区域 D 内的连续函数，它把 z 平面上区域 D 映象到 w 平面内。如果在这种映象下，通过 D 内任何一点的任意两条曲线，它们的交角的大小和方向都保持不变，那么就把这个映象 $w=f(z)$ 叫做共形映象。导数处处不是零的解析函数所实现的映象就都是共形映象。共形映象也叫做保角变换。

共形映象在流体力学、空气动力学、弹性理论、静电场理论等方面都得到了广泛的应用。它本身就是从流体力学和几何学的研究中产生出来的。

复变函数论中这部分用几何方法来说明、解决问题的内容，一般叫做几何函数论。

（三）

留数理论是复变函数论中一个重要的理论。留数也叫做残数，它的定义比较复杂，这里只能简单地解析一下它的概念。如果 $z=a$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点，那么 $f(z)/2\pi i$ 沿圆心在 a 的小圆周的积分就叫做 $f(z)$ 在 a 点的留数。

应用留数理论对于复变函数积分的计算比起线积分计算方便。计算实变函数定积分，可以化为复变函数沿闭回路曲

线的积分后，再用留数基本定理化为被积分函数在闭回路曲线内部孤立奇点上求留数的计算，当奇点是极点的时候，计算更加简便。

（四）

把单值解析函数的一些条件适当地改变和补充，以满足实际研究工作的需要，这种经过改变的解析函数叫做广义解析函数。广义解析函数所代表的几何图形的变化叫做拟保角变换。

解析函数的一些基本性质，只要稍加改变以后，同样适用于广义解析函数。

广义解析函数的应用范围很广泛，不但应用在流体力学的研究方面，而且象薄壳理论这样的固体力学部门也在应用。因此，近年来这方面的理论发展十分迅速。

十　实变函数论

实变函数论的产生

(一)

我们在微积分学这一章里，已经知道微积分学产生于十七世纪，到了十八世纪末和十九世纪初，微积分学已经基本上成熟了。数学家广泛地研究并建立起它的许多分支，使它很快就形成了数学中的一大部门，也就是数学分析。

也正是在那个时候，数学家逐渐发现分析基础本身还存在许多问题，比如，什么是函数这个比较简单而且十分重要的问题，数学界并没有一致的见解，以致长期争论着问题的这样和那样的解答，这样和那样的数学结果，弄不清究竟谁是正确的。又如，对于什么是连续性和连续函数的性质是什么，数学界也没有足够清晰的理解。十九世纪初，曾经有人试图证明任何连续函数除个别的点外总是可微的。后来，德国数学家魏尔斯特拉斯提出，如由级数定义的函数：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^{n}\cos(b^{n}\pi x),$$

$$(0<a<1,\ b\text{是一个奇数，而且}ab>1+\frac{3}{2}\pi)$$

这个级数被收敛级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ 所控制，所以是均匀收敛的，并且它的和到处是x的连续函数。但是，魏尔斯特拉斯证明了这个函数在任何点上都没有导数。这个证明使许多数学家大为吃惊。

（二）

由于发现了某些函数的奇特性质，数学家对函数的研究更加深入了。人们又陆续发现了有些函数是连续的但处处不可微，有的函数的有限导数并不黎曼可积；还发现了连续但是不分段单调的函数等等。这些都促使数学家考虑，我们要处理的函数，仅仅依靠直观观察和猜测是不行的，必须深入研究各种函数的性质。比如，连续函数必定可积，但是具有什么样性质的不连续函数也可积呢？如果改变积分的定义，可积条件又是什么样的？连续函数不一定可导，那么可导的充分必要条件又是什么样的？等等。

上面这些函数性质问题的研究，逐渐产生了新的理论，并且形成了一门新的学科，这就是实变函数论。

实变函数论的内容

（一）

以实数作为自变量的函数叫做实变函数，以实变函数作为研究对象的数学分支叫做实变函数论。它是微积分学的进一步发展，它的基础是点集论。什么是点集论呢？点集论是专门研究点所成的集合的性质的理论。也可以说实变函数论

是在点集论的基础上研究分析数学中一些最基本的概念和性质的，比如，点集函数、序列、极限、连续性、可微性、积分等。实变函数论还要研究实变函数的分类问题、结构问题、基本运算规则和各种表达方法问题。

实变函数论的内容包括实值函数的连续性质、微分理论、积分理论和测度论等。这里我们只对它的一些要重的基本概念作简要的介绍，关于它的系统理论就不叙述了。

（二）

实变函数论的积分理论研究各种积分的推广方法和它们的运算规则。由于积分归根到底是数的运算，所以在进行积分的时候，必须给各种点集以一个数量的概念，这个概念叫做测度。

什么是测度呢？简单地说，一条线段的长度就是它的测度。拿区间来说，区间(a,b)的测度，就是它的长$b-a$。这个区间的测度就可以记成

$$m(a,b)=b-a,$$

很明显，$m(a,b)$是大于零的。

测度的概念对于实变函数论十分重要，因为它对于区间概念的扩充有着本质的意义。集合的测度这个概念是由法国数学家勒贝格提出来的。

为了推广积分概念，1893年，约当（1838-1922）在他所写的《分析教程》中，提出了“约当容度”的概念并用来讨论积分。1898年，法国数学家波莱尔（1871-1956）把容度的概念作了改进，并把它叫做测度。波莱尔的学生勒贝格后来发表《积

分、长度、面积»的论文，提出了"勒贝格测度"、"勒贝格积分"的概念。勒贝格还在他论文«积分和原函数的研究»中，证明了有界函数黎曼可积的充要条件是不连续点构成一个零测度集，这就完全解决了黎曼可积性的问题。

(三)

在实变函数论中，函数 $f(x)$ 在某个集合 E 上定义，如果 E 本身可测，而且对于任何实数 a，集合 $E[f(x)>a]$ 也可测，就说函数 $f(x)$ 是可测函数。可以证明，在闭区间上给出的任意连续函数是可测的。同时有许多不连续的函数，同样也是可测的。

利用勒贝格积分来研究积分问题，永远可以按有界导函数 $F'(x)$ 来恢复它的原函数 $F(x)$，

$$F(x)=(L)\int_a^x F'(x)dx+c_{\circ}$$

式中的 (L) 是表示这个积分是勒贝格积分。

勒贝格积分定义也可以推广到无界函数的情形，这个时候所得积分是绝对收敛的，后来又推广到积分可以不是绝对收敛的。从这些就可以看出，勒贝格积分比起由柯西最初给出后来又由黎曼发扬的老积分定义广大多了。也可以看出，实变函数论所研究的是更为广泛的函数类。

(四)

自从魏尔斯特拉斯证明连续函数必定可以表示成一致收敛的多项式级数，人们就认清连续函数必定可以解析地表达出来，连续函数也必定可以用多项式来逼近。这样，在实变函

数论的领域里又出现了逼近论的理论。

什么是逼近论呢？举例来说，如果能把A类函数表示成B类函数(比如多项式)的极限，就说A类函数能以B类函数来逼近。如果已经掌握了B类函数的某些性质，那么往往可以由此推出A类函数的相应性质。逼近论就是研究哪一类函数可以用另一类函数来逼近、逼近的方法、逼近的程度和在逼近中出现的各种现象。

和逼近论密切相关的有正交级数理论，三角级数就是一种正交级数。当a_0、a_1、b_1、a_2、b_2…是常数的时候，

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos x+b_2\sin x)+\cdots$$

就叫做三角级数。和逼近论相关的还有一种理论，就是从某一类已知函数出发构造出新的函数类型的理论，这种理论叫做函数构造论。

总之，实变函数论和古典数学分析不同，它是一种比较高深精细的理论，是数学的一个重要分支，它的应用广泛，它在数学各分支的应用成了现代数学的特征。

十一　泛函分析

泛函分析的产生

（一）

十九世纪以来，数学的发展进入了新的阶段。这就是，由于对欧几里得第五公设的研究，引出了非欧几何这门新的学科；对于代数方程求解的一般考察，最后建立并发展了群的理论；对数学分析的研究又建立了集合论。这些新的理论都为用统一的观点把古典分析的基本概念和方法一般化准备了条件。

本世纪初，瑞典数学家弗列特荷姆（1886-1927）和法国数学家阿达玛发表的著作中，出现了把分析学一般化的萌芽。随后，希尔伯特和海令哲（1883-1950）开创了“希尔伯特空间”的研究。到了二十年代，在数学界已经逐渐形成了一般分析学也就是泛函分析的基本概念。

（二）

由于分析学中许多新部门的形成，揭示出分析、代数、几何的许多概念和方法常常存在许多相似的地方。比如，代数方程求根和微分方程求解都可以应用逐次逼近法，并且解的

存在和唯一性条件也极其相似；线性常微分方程论、线性差分方程论和线性代数方程组理论也十分相似。这种相似在积分方程论中表现得就更为突出了。泛函分析的产生正是和这种情况有关，有些乍看起来很不相干的东西，都存在着类似的地方，因此，它启发人们从这些类似的东西中探寻一般的真正属于本质的方面。

非欧几何学的确立拓广了人们对空间的认识，n 维空间几何的产生允许我们把多变数函数用几何学的语言解释成多维空间的映象。这样，就显示出了分析和几何之间的相似的地方，同时存在着把分析几何化的一种可能性。这种可能性要求把几何概念进一步推广，以致最后把欧氏空间扩充成无穷维数的空间。

（三）

现在再来讲一讲函数概念，函数概念这时候赋有了更为一般的意义。古典分析中的函数概念是指两个数集之间所建立的一种对应关系。现代数学的发展却是要求建立两个任意集合之间的某种对应关系。比如

$$Y=\left\{\vec{y}\right\}\text{是 } n \text{ 维矢量集，}$$

$$X=\left\{x\right\}\text{是实数集，}$$

那么，$\vec{y}=f(x)$ 建立了实数集 X 到 n 维矢量集 Y 之间的一种对应关系。

再举例来说，积分方程论中研究如下的积分式：

$$y(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)dt,$$

其中，$K(s,t)$是定义在正方形域 $a\leqslant s,t\leqslant b$ 内的连续函数，这样，积分式可以看成一个对应法则，根据这个法则，对$[a,b]$上每个连续的函数 $x(t)$，可使在同一闭区间上连续的另一函数 $y(s)$和它对应，这里建立的是两个连续函数集合之间的对应关系。

一般地说，给定任意两个集合 X 和 Y，并给定一个法则 f，假如对每一个元素 $x\in X$，根据这个法则可以使唯一确定的元素 $y\in Y$ 和它相对应，我们就说，在集 X 上定义了一个抽象函数或者算子 $y=f(x)$，它的值域包含在 Y 内。特别地，假如算子的值是实数，我们就把这个算子叫做泛函数。算子也叫做算符，在数学上，把无限维空间到无限维空间的变换叫做算子。

研究无限维线性空间上的泛函数和算子理论，就产生了一门新的分析数学，叫做泛函分析。在本世纪三十年代，泛函分析就已成为数学中一门独立的学科了。

泛函分析的特点和内容

(一)

泛函分析的特点是它不但把古典分析的基本概念和方法一般化了，而且还把这些概念和方法几何化了。比如，不同类型的函数可以看做是"函数空间"的点或矢量，这样最后得到了"抽象空间"这个一般的概念。它既包括了以前讨论过的几

何对象，也包括了不同的函数空间。

泛函分析对于研究现代物理学是一个有力的工具。n 维空间可以用来描述具有 n 个自由度的力学系统的运动，实际上需要有新的数学工具来描述具有无穷多自由度的力学系统。比如，梁的振动问题就是无穷多自由度力学系统的例子。一般来说，从质点力学过渡到连续介质力学，就要由有穷自由度系统过渡到无穷自由度系统。现代物理学中的量子场论就属于无穷自由度系统。

正如研究有穷自由度系统要求 n 维空间的几何学和微积分学作为工具一样，研究无穷自由度的系统需要无穷维空间的几何学和分析学，这正是泛函分析的基本内容。因此，泛函分析也可以通俗地叫做无穷维空间的几何学和微积分学。古典分析中的基本方法，也就是用线性的对象去逼近非线性的对象，完全可以运用到泛函分析这门学科中。

（二）

在量子力学中，曾经引入了所谓"δ 函数"：

$$\delta(x)=\begin{cases}1 \text{ 当 } x=0 \text{ 的时候,}\\ 0 \text{ 当 } x\neq 0 \text{ 的时候,}\end{cases}$$

而且
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1。$$

从这个函数我们可以直观地想象 $\delta(x)$ 的图形，只是在 $x=0$ 附近的一个小范围内，这个函数不是 0，而且在小范围内这个函数值很大，以至它在这个范围内的积分是 1。

按照函数的通用的数学定义，要求一个函数在它的范围

内每一点上都有一个确定的值。在这个意义下，$\delta(x)$ 就不能叫做一个函数，而是更具有一般性的某种东西，我们不妨把它叫做一个“非正规函数”，以指出它不同于通常意义下的函数。由于 δ 函数的引入，导致了广义函数论的研究，促进了泛函分析向着新的方向发展。

（三）

泛函分析是分析数学中最“年轻”的分支，它是古典分析观点的推广，它综合函数论、几何和代数的观点研究无穷维向量空间上的函数、算子和极限理论。它在本世纪四十到五十年代就已经成为一门理论完备、内容丰富的数学学科了。

泛函分析的主要内容包括拓扑线性空间及其算子理论、广义函数论、非线性泛函分析，等等。它在数学物理方程、概率论、计算数学、连续介质力学、量子物理学等学科有着广泛的应用。近十几年来，泛函分析在工程技术方面又获得了更为有效的应用。它还渗透到数学内部的各个分支中去，起着重要的作用。

十二　位置几何——射影几何学

讨论图形位置关系的几何学

(一)

十七世纪，当笛卡儿和费尔马创立的解析几何问世的时候，还有一门几何学同时出现在人们的面前。这门几何学和画图有很密切的关系，它的某些基本概念早在古希腊时期就曾经引起一些学者的注意。欧洲文艺复兴时期透视学的兴起，给这门几何学的产生和成长准备了充分的条件。这门几何学叫做射影几何学。

射影几何真正成为独立的学科、成为几何学的一个重要分支，主要是在十七世纪。为这门学科建立而作出了重要贡献的是法国两位数学家笛沙格和帕斯卡（1623-1662)。笛沙格是一个自学成名的数学家，他年青的时候当过陆军军官，后来钻研工程技术，成了一名工程师和建筑师。他对于艺术家、工程师和石匠的培养和教育很关心，对为理论而搞理论很不赞成。因此，他编集了许多有实用的教材，通过书信和传单传播他研究的问题所获得的成果，他在巴黎免费给人讲课，并且编写了几何在泥瓦工和石工方面的应用的书。他很熟悉阿波

罗尼斯的著作，并且决心用新的方法来证明圆锥曲线的定理。1636年，他出版过几本关于透视法的小册子。1639年，他出版了主要著作《试论圆锥和平面的相交所得结果的初稿》，书中他引入了许多几何学的全新的概念。他的朋友笛卡儿、帕斯卡、费尔马都很推崇他的著作，费尔马甚至认为他是圆锥曲线理论的真正奠基人。笛沙格在他的著作中，把直线看作是具有无穷大半径的圆，而曲线的切线被看作是割线的极限，这些概念都是射影几何学的基础。用他的名字命名的笛沙格定理："如果两个三角形对应顶点联线共点，那么对应边的交点共线。"反之也成立。就是射影几何学的基本定理。

帕斯卡也为射影几何学的早期工作作出了重要的贡献，1641年，他发现了一条定理："内接于一二次曲线的六边形的三双对边的交点共线。"这条定理叫做帕斯卡六边形定理，也是射影几何学中的一条重要定理。1658年，他写了《圆锥曲线论》一书，书中很多定理都是射影几何学方面的内容。笛沙格和他是朋友，曾经敦促他搞透视方面的研究，并且建议他要把圆锥曲线的许多性质简化成少数几个基本命题作为目标。帕斯卡接受了这些建议。后来他写了许多有关射影几何方面的小册子。

（二）

到了十九世纪，射影几何学处在蓬勃发展的阶段，许多数学家都专心研究图形的射影性质，把新的概念引进这门学科。

1822年，法国数学家彭色列（1789-1867）系统地研究了几何图形在投影变换下的不变性质，他写了《论图形的射影几

何性质》一书，建立了射影几何学的严密理论。

1836年，瑞士数学家史坦纳（1796-1863）证明了具有已知周长的一切封闭曲线中包围最大面积的图形必定是圆，并且对二次曲线和曲面的理论作了深入的研究。

1847年，德国数学家斯陶特（1798-1867）写了一本关于射影几何学的著作，书名叫做《位置几何》。他对射影几何学的研究完全摆脱了代数和度量的关系，主要是讨论图形中元素间的位置关系，因此，射影几何学又被人们叫做位置几何学。

1859年，英国数学家凯莱（1821-1895）发表了他的《代数形式的第六篇论文》，提出了"度量几何是射影几何的一部分，射影几何是所有的几何"的观点。

（三）

射影几何学的发展和其他数学分支的发展有密切的关系，特别是"群"的概念产生以后，也被引进了射影几何学，对这门几何学的研究起了促进作用。

概括地说，射影几何学是几何学的一个重要分支学科，它是专门研究图形的位置关系的，也就是专门用来讨论在把点投影到直线或者平面上的时候，图形的不变性质的科学。

射影几何学在航空、摄影和测量等方面都得到了广泛的应用。

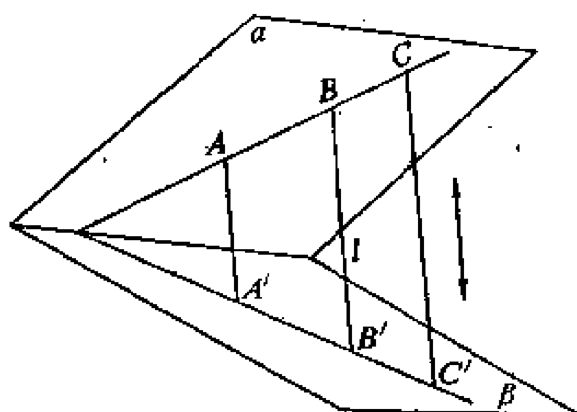
仿射几何学

（一）

这里我们先介绍一下仿射几何学。

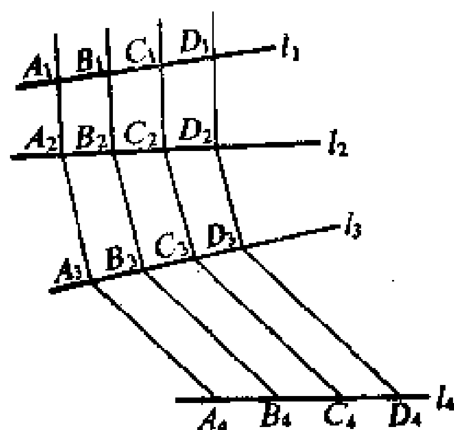
什么是仿射几何学呢？下面我们通过一些浅显的例子来讲述它的内容。

在加工机械零件的时候，它的形状、大小都要用图纸表示出来。图纸上的视图是通过平行投影的方法得到的。我们根据图纸上的对应点、线间的关系，就可以确定空间物体的形状。每次投影实际上是一种对应，这种对应有什么性质呢？这里可以先从两个平面间的平行投影说起。



如右图所示，相交的两个平面α和β，交线是l，这条交线l也叫做对应轴，通过平面α内各点A、B、C…引平行线交平面β于A'、B'、C'…。这样就使平面α的点和平面β的点建立了一种一一对应关系。这种对应叫做α到β的透视仿射对应，或者叫做平行投影。

平行投影和平行的方向有关，当方向变更的时候，就有不同的平行投影使得平面α上的A、B、C各点在平面β上有不同的对应点。



把一个图形经过有限次的平行投影叫做仿射对应。象左图表示的那样，l_1、l_2、…、l_n是表示在同一平面内的n条直

线，经过一连串的平行投影，使最初一条直线 l_1 上的各点和最末一条直线 l_n 上的各点存在着一一对应的关系，这种对应叫做仿射对应。

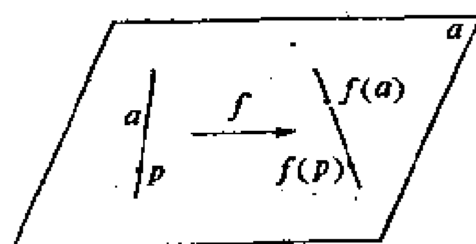
可以看出，透视仿射对应是一般仿射对应的特殊情况。特别地，把在同一平面内单方面的透视仿射对应叫做透视仿射变换。有限回的透视仿射变换组成仿射变换。由于仿射变换就是同一平面内的仿射对应，因此，在平面内如果把直线上的点经过平行投影到另一直线上，这样得到点和点之间的对应就是仿射变换。

仿射变换的特征是，对应点的连线互相平行，对应直线的交点在同一直线上或者平行于一条直线，这条直线就是对应轴。

（二）

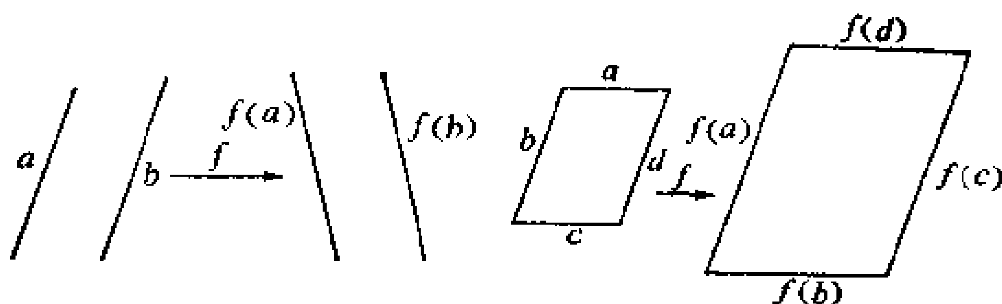
图形在仿射变换下有很多性质，这里我们主要介绍在仿射变换中的不变性质。

第一，直线变直线，线段变线段，射线变射线。比如直线 a 在仿射变换 f 下，变成 $f(a)$，就是说，直线 a 上的点的集合变成 $f(a)$ 上的点的集合。象左图表示的那样，就是一条直线变成另一条直线。



第二，在仿射变换下点和直线、直线和平面的结合性不变。

第三，在仿射变换下两条直线的平行性不变。象下页上



边的左图，设直线 a 平行于 b，在仿射变换下，对应的两条直线 $f(a)$、$f(b)$ 也平行。如上边的右图所示，很显然，在仿射变换下，平行四边形变成平行四边形。

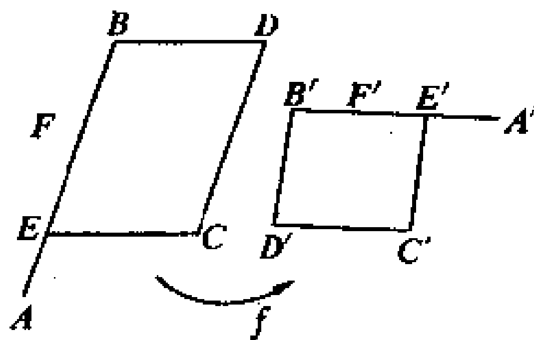
第四，在仿射变换下，同一直线上三点的简比不变。什么叫做简比呢？设 A、C 是有向直线的两点，B 是它上面的第三点，B 把线段 $\overline{AC}$ 分成两部分：$\overline{AB}$ 和 $\overline{CB}$，它们的量数的比 $\frac{AB}{CB}$ 叫做简单比，也叫做简比，记成 (ACB)。也就是

$$(ACB)=\frac{AB}{CB}。$$

在仿射变换下，$(ACB)=(A'C'B')$，这里 A、A'，B、B'，C、C' 分别是对应点。

右下图表明，图形 F 经过仿射变换 f 得到 F'，这样就有

$$(AEB)=\frac{AB}{EB}$$
$$=(A'E'B')=\frac{A'B'}{E'B'}。$$



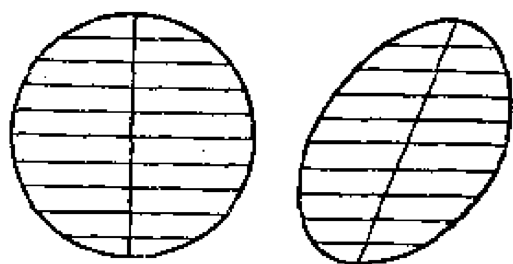
从这条性质可以知道，在仿射变换下，一条线段的长度有变化，但它上

面的三点的简比却保持不变。

(三)

仿射几何学主要研究在仿射变换下图形的不变性质。

仿射变换也是研究图形性质的重要工具。比如，为了研究椭圆的平行弦中点的性质，可以先利用仿射变换把椭圆变成圆。根据仿射变换的不变性质，象左图所示，这时候椭圆的平行弦变成圆的平行弦，但是直径对于弦的垂直性却不相同。我们已经知道圆的平行弦的中点都在圆的直径上，从而可以断言，椭圆的平行弦的中点也在椭圆的直径上。



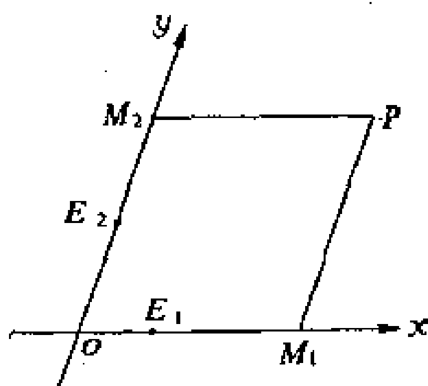
(四)

在仿射几何学中，也可以用解析法讨论仿射变换，这样就需要建立仿射坐标系。

在平面上给出两个不共线的向量$\overrightarrow{OE_1}$和$\overrightarrow{OE_2}$，它们所在的直线记成OX、OY，象右下图表示的那样，过平面上任何一点P作OY和OX的平行线，分别交OX、OY于M_1、M_2，设点P和一对实数(x,y)相对应，x、y的值的意义就是

$$x=\frac{OM_1}{OE_1},$$

$$y=\frac{OM_2}{OE_2}。$$



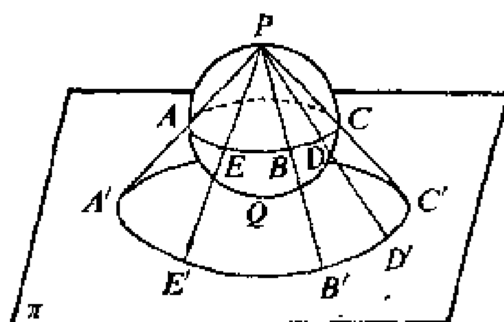
把(x,y)叫做P点的仿射坐标，向量$\overrightarrow{OE_1}$、$\overrightarrow{OE_2}$叫做基底向量。用这种方法建立的坐标系和前面介绍过的坐标系有密切关系。如果在仿射坐标系里$\overrightarrow{OE_1}$、$\overrightarrow{OE_2}$都取成单位向量，那么(x,y)就是P点的笛卡儿斜角坐标；如果$\overrightarrow{OE_1}$和$\overrightarrow{OE_2}$垂直，并且都取单位向量，那么，(x,y)就是P点的笛卡儿直角坐标。因此，笛卡儿坐标是仿射坐标的特殊情况。

定义了仿射坐标系的平面叫做仿射平面。在这个平面上，不考虑如长度、角度等度量性质。仿射平面实际上是在欧氏平面上仅仅"不考虑度量"性质的那些点的集合。

射影几何学

(一)

本章开头，我们已经介绍了射影几何学的形成的粗略概况，现在再举具体的例子来说明这门学科的研究内容。



右图是一个地球仪，平面π和地球仪相切于南极Q，如果从它的北极P和球上各点相连，球上各点的投影在平面π上，一般来说，球面上的点对应于平面π上的点。同样，球面上的一条曲线和平面π上的一条曲线也是对应着的。球面上有两条曲线相交，交点有两个，那么在平面π上的投影也是相交于两个交点的曲线，前者交点的映象相当于后

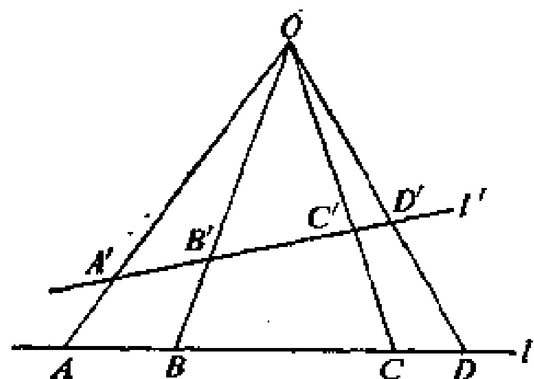
者的交点。如果球面上的两条曲线相切，那么它们在平面 π 上的映象也是两条相切的曲线。上面的例子说明地球仪上的点和平面 π 上的点之间建立了一种对应关系。

这种对应关系就是欧洲文艺复兴时期人们在绘画和建筑艺术方面非常注意和大力研究的内容。那时候，人们发现，一个画家要把一个实物画在一块画布上就好比是用自己的眼睛当作投影中心，把实物的影子映射到画布上去，然后再描绘出来。在这个过程中，被描绘下来的象中的各个元素的相对大小和位置关系，有的变化了，有的却保持不变。这样就促使数学家对图形在中心投影下的性质进行研究，因而就逐渐产生了许多过去没有的新的概念和理论，形成了射影几何学这门学科。

（二）

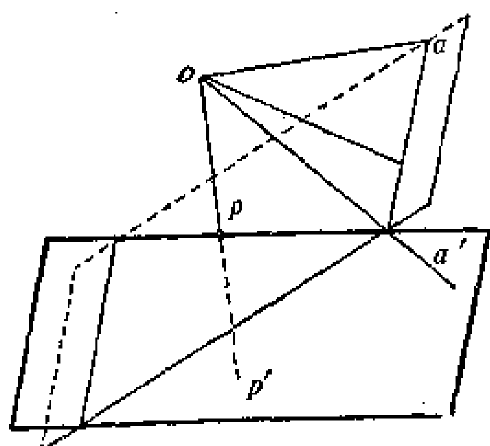
射影几何学有一个十分重要的概念，这就是中心投影。什么是中心投影呢？

举例来说，下图中，设直线 l 和 l' 是同一平面内两条不重合的直线，O 是平面内不在 l 和 l' 上的一点。如果 A、B、C、D…是直线 l 上的许多点。把它们分别和 O 点连结起来，得到 OA、OB、OC、OD…，它们和直线 l' 分别交于 A'、B'、C'、D'…各点。这些点和原来的 A、B、C、D…各点存在着一

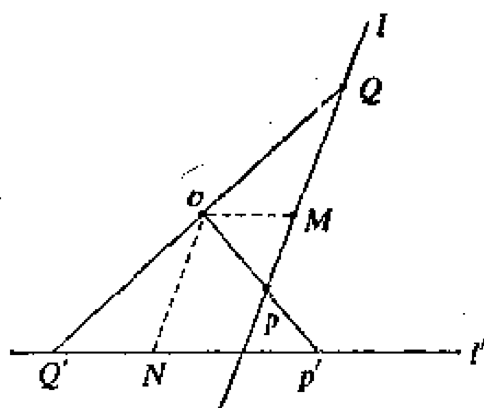


种对应的关系，把这种对应关系叫做在同一平面内两条直线 l 和 l' 间的中心投影。很明显，中心投影和投影中心有关，当中心不同的时候，就有不同的中心投影。

现在来看一看右图，平面 α 和 α' 是空间的两个相交平面，O 点不在这两个平面内，P 是平面 α 内的一点，如果OP和平面 α' 相交，交点P'就叫做平面 α 内的 P 点是从 O 点到平面 α'的中心投影。在中心投影下，平面 α 上的各点和它们在平面 α' 上的映象也存在一种对应关系。



在讨论中心投影点的时候，可能我们已经注意到了，比如在左图中，直线 l 上的一点 M 和中心 O 的连线 OM，如果和直线 l' 平行，那么 M 点在 l' 上的中心投影就不存在了。这时候，直线 l 上的点和它在 l' 上的中心投影就不能建立一一对应的关系。这样就给研究射影几何带来很多麻烦，比如，以后每逢遇到这种情况，就得作个别讨论或者另行处理。如果这样，对每一例外的情况都一一加以讨论，射影几何学就会变得过于繁复了。为了在中心投影下每一个平面内的每一条直

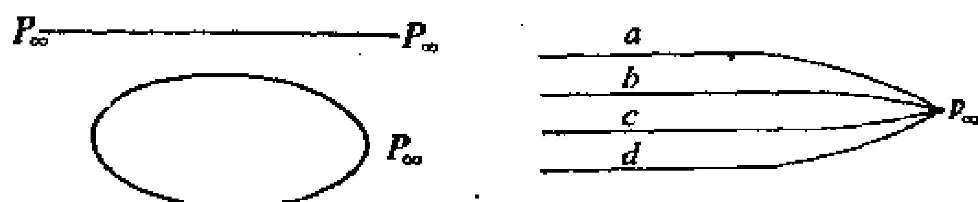


线在另一个平面内有它的对应直线，在射影几何学中作了一个特别规定，就是在直线上的通常点以外加上一个新点，叫做无穷远点，记作 P_∞，在平面内加上一条新直线，叫做无穷远直线，记作 l_∞，用它们来消除上述例外的情况。

（三）

在射影几何学中，把无穷远点看作“理想点”。

在通常的一条直线上外加一个并且仅仅加一个无穷远点之后，这条直线的形象是什么呢？请看下面左边上下两个图



就知道，首先它有同一个端点，就是无穷远点 P_∞，这样的直线就成了闭合曲线的形象。很明显，这样的直线上的点的集合和实数就不能建立一一对应关系。如果象上面右边的图那样，在每条直线上的普通点里加上一个“无穷远点”，这点就被看作是属于所有平行于已知直线的直线，而不属于其余的线。因此在一个平面内两条直线一定相交于一点。如果这两条直线不平行，就相交于一个普通点；如果这两条直线平行，那么交于这两条直线所共有的无穷远点。通过同一无穷远点的所有直线彼此平行。

在一个平面内加上一条无穷远直线后，无穷远直线就含有这个平面上所有的无穷远点。

在引入无穷远点和无穷远直线以后，点和直线的结合关

系和过去的普通点和普通直线的结合关系有变化吗?

第一,两条平行线只有一个无穷远点;

第二,通过同一无穷远点的所有直线彼此平行,一组平行线通过同一个无穷远点;

第三,通常直线上有一个而且只有一个无穷远点;

第四,平面内有一条而且只有一条无穷远直线;

第五,两点确定一条直线;

第六,两个无穷远点确定一条无穷远直线,两直线相交,必交于一点。

从这几点可以看出,在扩大了点和线的概念后,原来的普通点和线的结合关系继续成立,而过去一些只有当两条直线不平行的时候才能求交点的限制就消失了。

这种思想方法和代数中数系的扩大,指数概念普遍化等都是一样的。

由于经过一个无穷远点的直线都平行,因此,中心射影和平行射影两者之间就可以统一了。平行射影可以看作仅仅是经过无穷远点的中心投影。这样,凡是利用中心投影或者平行投影把一个图形映成另一个图形的映射,今后都可以叫做射影变换。

(四)

射影变换有两个重要性质。第一,射影变换使点列变点列,直线变直线,线束变线束(从一点发出若干条射线组成线束)。点和直线的结合性是射影变换的不变性。这是射影变换中最基本的性质。第二,射影变换下交比不变。什么叫做



交比呢？举例来说，如左边的图是一条直线，直线上有四点A、B、C、D，把C、D分割线段AB的比，就是

$$\frac{CA}{CB}:\frac{AD}{DB}$$

叫做四个共线点A、B、C、D按这个次序下的交比。

交比是射影几何学中的重要概念，用它也可以说明两个平面点之间的射影对应：两个平面之间的一一对应，如果保持任何共线四点的交比不变，这两个平面点之间的对应就叫做射影对应。

（五）

在射影几何学里，把点和直线叫做对偶元素，把"过一点作一直线"和"在一直线上取一点"叫做对偶运算。在两个图形中，它们如果都是由点和直线组成，把其中一图形里的各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算，结果就得到另一个图形。这两个图形叫做对偶图形。在一个命题中叙述的内容只是关于点、直线和平面的位置，可把各元素改为它的对偶元素，各运算改为它的对偶运算的时候，结果就得到另一个命题。这两个命题叫做对偶命题。

这就是射影几何学所特有的对偶原则。在射影平面上，如果一个命题成立，那么它的对偶命题也成立，这叫做平面对偶原则。同样，在射影空间里，如果一个命题成立，那么它的对偶命题也成立，叫做空间对偶原则。

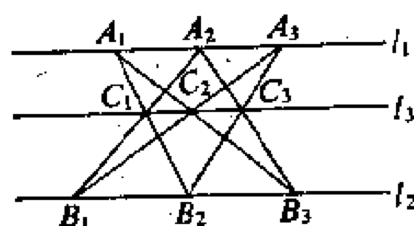
下面举例说明：

巴卜士定理

假设 A_1、A_2、A_3 是在同一直线 l_1 上的三点；

B_1、B_2、B_3 是在同一直线 l_2 上的三点；

C_1 是 A_1B_2 和 A_2B_1 的交点；C_2 是 A_1B_3 和 A_3B_1 的交点；C_3 是 A_2B_3 和 A_3B_2 的交点；那么，C_1、C_2、C_3 在同一直线 l_3 上。



笛沙格定理

假设 $\triangle A_1B_1C_1$ 和 $\triangle A_2B_2C_2$ 在平面 M 上，

A_1A_2，B_1B_2，C_1C_2 会于同一点 L，那么

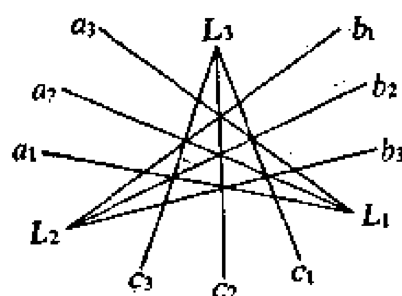
A_1B_1 和 A_2B_2 的交点、B_1C_1 和 B_2C_2 的交点、C_1A_1 和 C_2A_2 的交点在同一直线 l 上。　　（如下页左图）

它的对偶命题

假设 a_1、a_2、a_3 是过同一点 L_1 的三直线；

b_1、b_2、b_3 是过同一点 L_2 的三直线；

C_1 是 a_2b_3 和 a_3b_2 的联线；C_2 是 a_1b_3 和 a_3b_1 的联线；C_3 是 a_1b_2 和 a_2b_1 的联线；那么，C_1、C_2、C_3 过同一点 L_3。



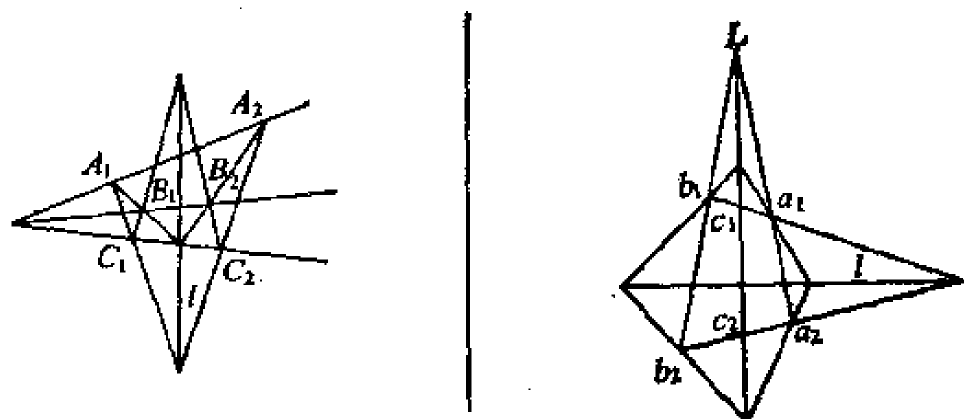
对偶定理

假设 $\triangle a_1b_1c_1$ 和 $\triangle a_2b_2c_2$ 在平面 M 上，

a_1a_2、b_1b_2、c_1c_2 在同一直线 l 上，那么

a_1b_1 和 a_2b_2 的联线、b_1c_1 和 b_2c_2 的联线、c_1a_1 和 c_2a_2 的联线会于同一点 L 上。

（如下页右图）



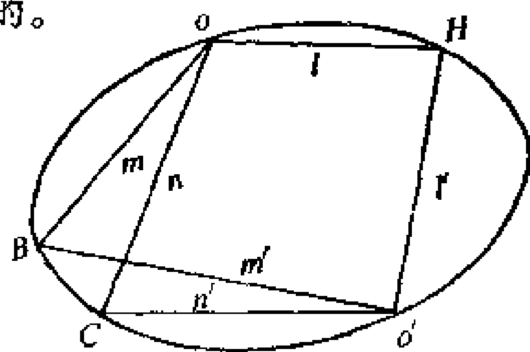
上面这些命题都是射影几何中的重要定理，这些定理有两个特点：

第一，这些定理所叙述的内容，如果把它的图形作出，只要拿一条无刻度的直尺就可以了，用不着圆规等。图形中都是过两点作一直线或作两条直线的交点；

第二，这些定理中都没有度量的关系。在这些定理中只看见"某点在某直线上"或"某直线经过某点"等等，都是点、直线间的位置关系，不讨论长度、角度、面积、体积等度量性质。

（六）

研究在射影变换下二次曲线的不变性质，是射影几何学的一项重要内容。在射影几何学里是这样来定义二次曲线的。



如左图所示，通过一点 O 的线束 $O(l)$ 和通过另一点 O' 的线束 $O'(l')$ 是两个射影而非透视对应的线束，把对应直线

$$\begin{cases} l \longrightarrow l' \\ m \longrightarrow m' \\ n \longrightarrow n' \end{cases}$$

的交点的集合叫做二次曲线。

在射影几何学里，关于二次曲线的射影性质的内容很多，如我们在本章开头介绍过的帕斯卡六角形定理就是二次曲线的射影性质。其他的内容就不细谈了。

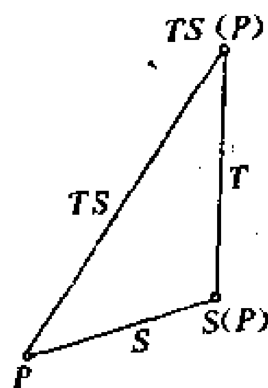
（七）

这里我们再介绍一下"变换群"这个概念。什么叫做变换群呢？在几何变换中，凡是符合下面两个条件的变换所成的集合就叫作变换群。这两个条件是：

第一，集合内任何两个变换的积仍属于这个集合；

第二，集合内任何一个变换有它的逆变换，而这个变换也属于这个集合。

这里提到的两个变换的积这个概念，在几何里是这样理解的，如右下图所示，设有两个变换 S、T，首先运用 S 到任意点 P，把它的象记作 $S(P)$，再运用 T 到这个象，把所得出的象记作 $TS(P)$，考察点 P 和点 $TS(P)$ 间的对应，如果把它写成 TS，显然 TS 也是变换，把这种变换叫做原来两个变换 S、T 的积。显然变换的积总是满足结合律。



仿射变换的全体组成一个变换群，叫做仿射变换群；射影变换的全体也组成一个变换群，叫做射影变换群。

几种几何的关系

（一）

这里应该再简述一个概念，就是合同变换。什么是合同变换呢？有两个图形，如果存在一个“移动”使它们重合，就叫做合同。移动实际上就是一种“变换”。把一个图形搬到另外一个不同的地点，也可以看作是这两个图形点之间的变换，也就是合同变换。

欧氏几何学是研究图形在运动变换下不变性质的科学。

（二）

从我们已了解的这三种几何学的情况来看，它们的基本不变性和基本不变量如下：

欧氏几何学：
- 结合性、平行性、垂直性；
- 角度、距离。

仿射几何学：
- 结合性、平行性；
- 简比。

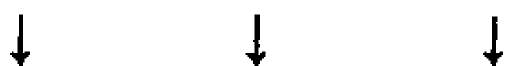
射影几何学：
- 结合性；
- 交比。

另外，合同变换是仿射变换的特例，因此，合同变换全体集合是仿射变换集合的一部分。同样，仿射变换的全体集合是射影变换集合的一部分。

如果用记号⊃表示包含的意思，那么，这三种几何就其范

围的大小而言有下面的关系：

射影变换群⊃仿射变换群⊃合同变换群，



射影几何学⊃仿射几何学⊃欧氏几何学。

如果就几何学内容的多少来说，这三种几何的关系是：

射影几何学⊂仿射几何学⊂欧氏几何学，这就是说欧氏几何学的内容最丰富，而射影几何学的内容最贫乏。比如在欧氏几何学里可以讨论仿射几何学的对象（如简比、平行性等）和射影几何学的对象（如四点的交比等），反过来，在射影几何学里不能讨论图形的仿射性质，而在仿射几何学里也不能讨论图形的度量性质。

1872年，德国数学家克莱因在爱尔朗根大学提出著名的《爱尔朗根计划书》中提出用变换群对几何学进行分类，就是凡是一种变换，它的全体能组成“群”，就有相应的几何学，而在每一种几何学里，主要研究在相应的变换下的不变量和不变性。

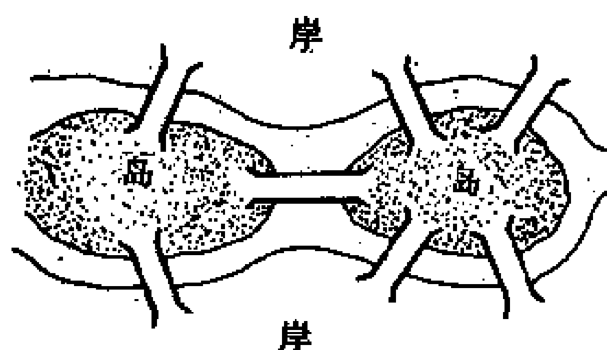
十三 不量尺寸的几何——拓扑学

几何拓扑学的先声

(一)

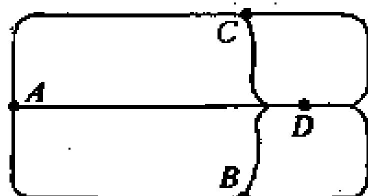
几何拓扑学是十九世纪形成的一门数学分支，它属于几何学的范畴。有关拓扑学的一些内容早在十八世纪就出现了。那时候发现的一些孤立的问题，后来在拓扑学的形成中占着重要的地位。在数学上，关于哥尼斯城堡的七座桥的问题就是一个生动的例子。

什么是哥尼斯城堡问题呢？哥尼斯城堡是东普鲁士的一个地方，十八世纪在这个城堡的河上建有七座桥，如左下图表示的那样，它们把河的两岸和河中的两个小岛互相连结起来。当时有人提出这样一个问题：一个人每座桥只许走过一次，怎样才能走遍这七座桥，最后又回到原来的出发点？这个问题乍看起来好象很简单，但是谁也没有做到，因此，要得出一个明确的理想的答案



却并不那么容易。

这个问题后来被数学家欧勒知道了，欧勒经过反复思考，用一个独特的方法证明了这个问题是不能实现的。欧勒把这个问题化做这样一个数学题：如果把岛记作 A，把河的左岸记作 B，右岸记作 C，上游两条支流之间的陆地记作 D，(如右图所示)，怎样一笔画出如右图组成的七条线组成的图？欧勒指出，不论以哪一点作为起点，以哪一点作为终点，在点 A、B、C、D 中至少有两个点是中途点，每穿过一次这样的点，就要画一条进入的线和一条离开的线。现在图中每个点处有三条或五条线(每个点叫奇点)，所以总要留下一条线没有画到。因此他断言要从一点出发而不重复地走遍七座桥又回到原出发点是不可能的。并且明确指出，在出发点和终点是同一点的情况下，要达到上述目的，图形上的点必须都是偶点(每个点都有偶数条出发线)才可以。



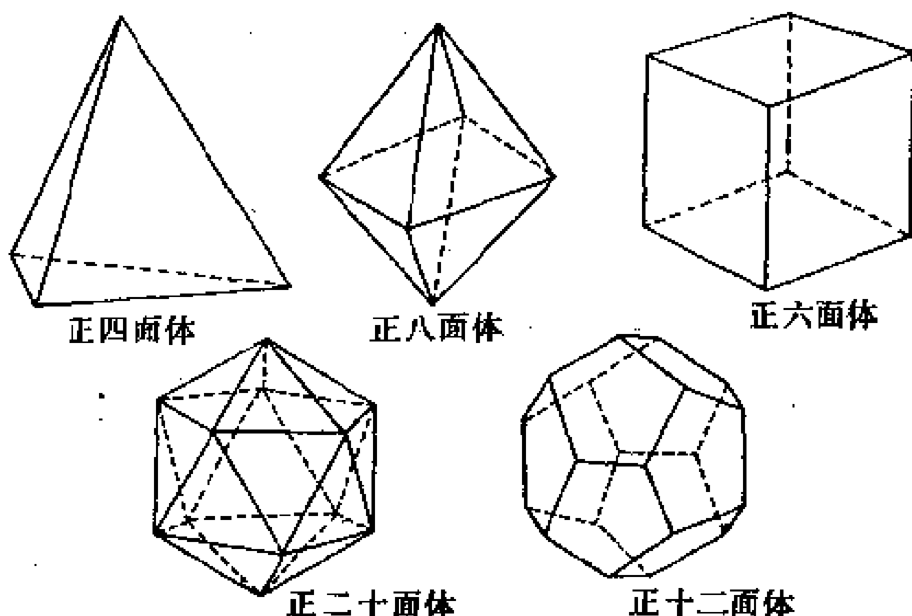
(二)

在拓扑学发展的历史中，关于多面体的欧勒定理也是一个著名而重要的问题。定理的内容是这样的：取一个多面体，设 V 表示它的顶点数目，E 表示棱的数目，F 表示面的数目，那么，V、E、F 之间就有如下的关系：

$$F+V-E=2。$$

根据欧勒定理又可以证明这样一个有趣的事实：在我们的生活中只存在五种正多面体。这五种正多面体是正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正二十面体。下面的

图就是这五种正多面体。



（三）

著名的“四色问题”也是和拓扑学发展有关的问题。所谓四色问题，就是在平面上给出了一幅地图，如果它上面的每一个国家都用一定的颜料染了色，而且任何两个相邻国家染的颜色都不相同，那么就说是把地图正确地染了色。问题是每一幅地图最少要用几种颜色才能正确地染色呢？经过多次实践，人们发现在地图上不管画出多少国家，也不管这些国家的座落情况是怎样的，我们都可以用四种不同的颜料正确地染上色。直到现在，还没有找到一幅用四种颜料不能正确染色的地图。1850 年，数学家就提出“四色足够”的猜想。但是，这个问题，要从数学上加以证明却很不容易。这个“四色猜想”曾被一些著名的数学家轻视，认为不屑于去证明。但是，一百多年来，谁也没有能够给出证明。因此，“四色猜想”成了

一道难题。

1976 年，美国两位数学家用电子计算机，化了 1200 个小时，终于证明了“四色问题”。

上面这几个例子所讲的都是一些有关几何图形的问题，而这些几何问题又和已经研究过的几何学不同，而是一些新的几何概念。人们常把上面这些例子叫做“拓扑学”的先声。

什么是拓扑学？

（一）

拓扑学的英文名是 Topology，直译的意思是地志学，也就是和研究地形、地貌相类似的有关学科。我国早期曾翻译成“形势几何学”、“连续几何学”、“一对一的连续变换群下的几何学”，但是，这几种译名都不大好理解，有的又很长，1956年，统一的《数学名词》把它确定成拓扑学，是按Topology的译音来确定的。

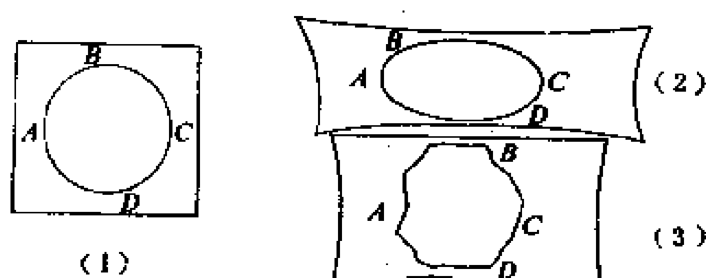
拓扑学是几何学的一个分支，但是这种几何学又和通常的“平面几何”、“立体几何”不同。通常的平面几何或立体几何研究的对象是点、线、面之间的相关位置关系以及它们的度量性质。拓扑学对于研究对象的长短、大小、面积、体积等度量性质和数量关系都无关。

举例来说，在通常的平面几何里，把平面上的一个图形搬到另一个图形上，如果完全重合，那么这两个图形叫做全等形，也就是说，通常的平面几何是研究在运动中大小和形状都不变的学科。但是，在拓扑学里所研究的图形，在运动中无论

它的大小或者形状都发生变化。在拓扑学里没有不能弯曲的元素，每一个图形的大小、形状都可以改变。例如象前面所讲的，欧勒在解决哥尼斯堡七座桥问题的时候，他画的图形就不考虑它的大小、形状，仅考虑点和线的个数。这些就是拓扑学思考问题的出发点。

（二）

在拓扑学里，几何图形是怎样变化的呢？现在我们设想



把一个圆画在一块橡皮膜上，就象上图左边的(1)图那样，如果把这块橡皮膜拉抻，膜上的圆就可能变化成如上面右边的(2)(3)两个图那样，圆的大小和形状都和左边的圆不同了。但是不管怎样拉抻橡皮膜，只要不把橡皮膜拉断、折裂或者重叠，图形中只有一条通路 $ABCDA$。也就是如果从通道上任一点出发，都可以回到原出发点。

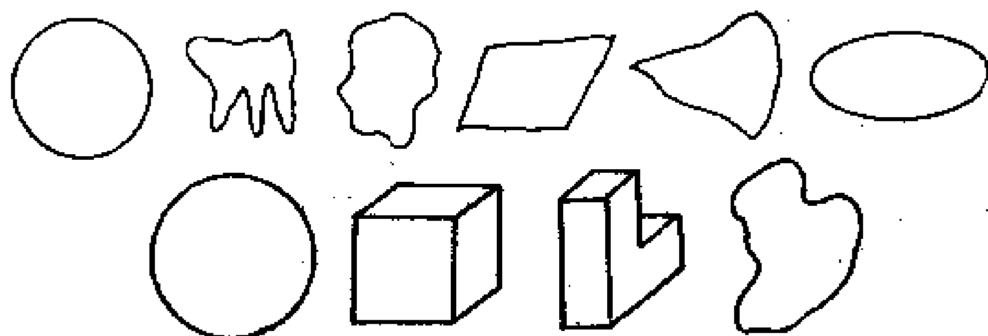
根据上面的图，我们可以设想，如果在一块橡皮膜上画一个圆 O，然后把橡皮膜扭歪、拉抻、压缩，但是不要折断，也不要重叠，这时候圆 O 就可能变成一个歪歪扭扭的图形 F。圆 O 和图形 F 的大小、形状都不相同，但是圆 O 上的每一个点都变成图形 F 上的一个点，不会一个点变成两个点，也不会两个点变成一个点，这就叫做一一对应。圆 O 上两个非常接近的点

A、B，变成图形 F 上的两个点 A_1、B_1，它们也非常接近。反过来，图形 F 上任意两个很接近的点，原来在圆 O 上也很接近。这种性质叫做双方连续变换。

(三)

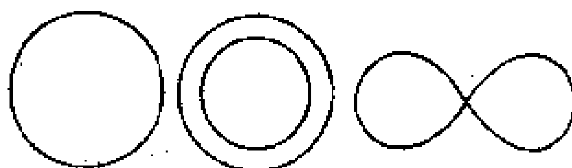
凡是一一对应而且是双方连续的变换就叫做拓扑变换。关于双方连续变换也可以理解成在变换中不破坏图形各部分的"附贴"关系。也就是说，如果图形经过连续变换后，"附贴"关系没有被破坏，并且也没有增添新的"附贴"关系，这种变换就叫做拓扑变换。

举例来说，看一下下面这两组图形，它们各是一个闭合曲



线，经过拓扑变换后，由于变换中没有破坏它的"附贴"关系，所以这两组图形就各自可以作为拓扑变换而相互变换。

下面这组图形是一个圆面、一个环面和 8 字形的曲线，这



种图形的变换就不是拓扑变换了。

拓扑变换有些什么性质呢？图形在拓扑变换下有哪些性

质保持不变呢？这就是拓扑学所要研究的内容。也就是说，拓扑学是研究几何图形在拓扑变换下拓扑不变性和不变量的学科。拓扑不变性和不变量也叫做拓扑性质。

拓扑变换的性质

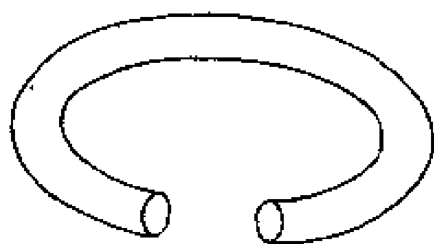
(一)

拓扑性质有哪些呢？首先我们介绍拓扑等价，这是比较容易理解的一个拓扑性质。

在拓扑学里不讨论两个图形全等的概念，但是讨论拓扑等价的概念。比如，尽管圆和正方形、三角形的形状、大小不同，在拓扑变换下，圆和正方形、三角形都是等价图形。

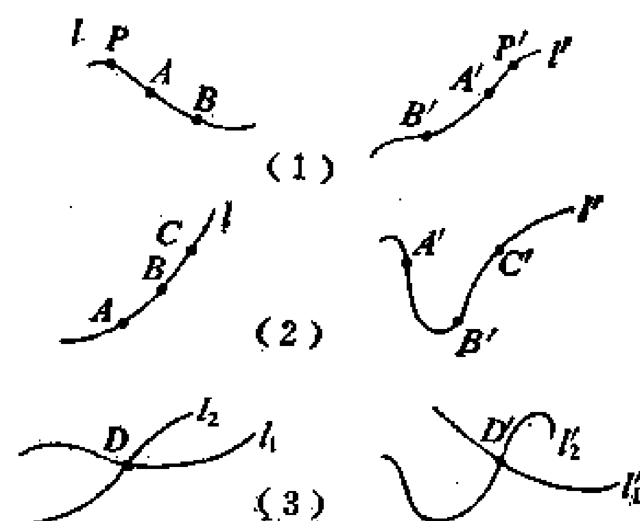
在一个球面上任选一些点用不相交的线把它们连接起来，这样球面就被这些线分成许多块。在拓扑变换下，点、线、块的数目仍和原来的数目一样，这就是拓扑等价。一般地说，对于任意形状的闭曲面，只要不把曲面撕裂或割破，它的变换就是拓扑变换，就存在拓扑等价。

应该指出，环面不具有这个性质，比如，象左图那样，把环面切开，它不至于分成许多块，只是变成一个弯曲的圆筒形，对于这种情况，我们就说球面不能拓扑地变成环面。所以球面和环面在拓扑学中是不同的曲面。



(二)

直线上的点和线的结合关系、顺序关系，在拓扑变换下不

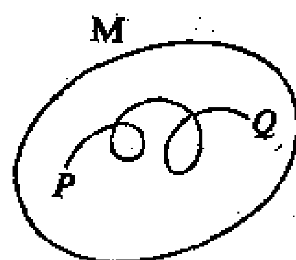


变，这也是拓扑性质。

上面这组图一共有三对，分上中下来叙述。拿上面(1)这对来说，如果点 P 是 l 线上的一点，那么经过拓扑变换后，P 的象 P' 仍是 l 的象 l' 上的一点。

中间(2) 这对图说明，如果 A、B、C 是 l 线上有顺序的三点，经过拓扑变换后，它们的象 A'、B'、C' 在 l' 上仍具有相同的顺序。

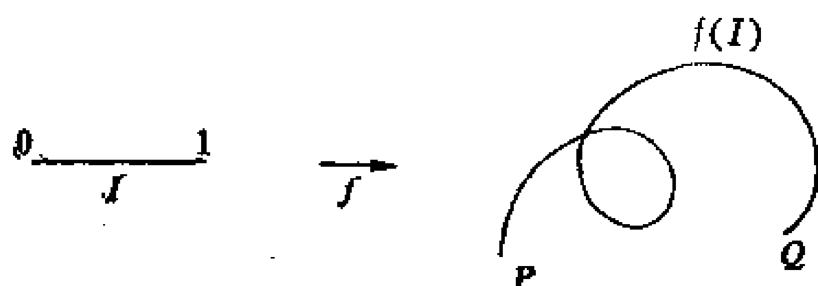
下面(3) 这对图表示，如果 l_1 和 l_2 相交于 D 点，经过拓扑变换后，l_1 和 l_2 的象 l_1' 和 l_2' 仍相交于 D 点的象 D'。



在拓扑学中还有一个重要概念，就是连通的概念。如右图所示，P、Q 两点是区域 M 中的任意两点，如果连接成通道，这个区域就叫做连通域。

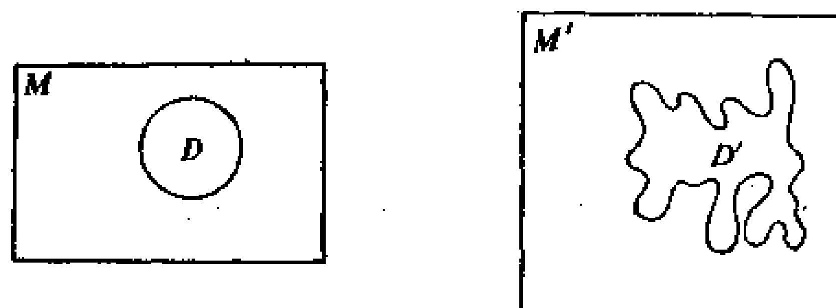
(三)

在拓扑学中曲线或曲面的闭合性质也是拓扑性质。例如



上图所示，设线段的点的集合是 I，从 I 经过连续变换 f 变成曲线 $f(I)$，设它的两个端点 $f(0)=P$，$f(1)=Q$，这条曲线就叫做 P 和 Q 的通道。如果对于两个端点 0、1 经过变换 f 后，变成 $f(0)=f(1)$，就叫做闭曲线。

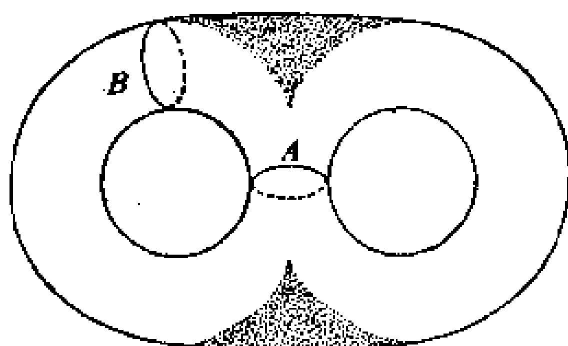
如果 D 是平面 M 上的一个圆周上的点的全体（如下图所



示），D 把平面 M 上的点分成三类：一类在 D 内，一类在 D 上，一类在 D 外；经过拉、抻后，M 变成 M'，D 变成平面 M' 上的一条曲线 D'。D' 也把 M' 上的点分成三类：一类在 D' 内，一类在 D' 上，一类在 D' 外。并且在 D 内、上、外的点经拉抻后仍然是在 D' 内、上、外的点。D 内的点连成一片，D' 内的点也连成一片。就是说"内"、"外"、"连成一片"等关系在拓扑变换下都是不变的。象 D' 一类的曲线叫做平面上的约当曲线。

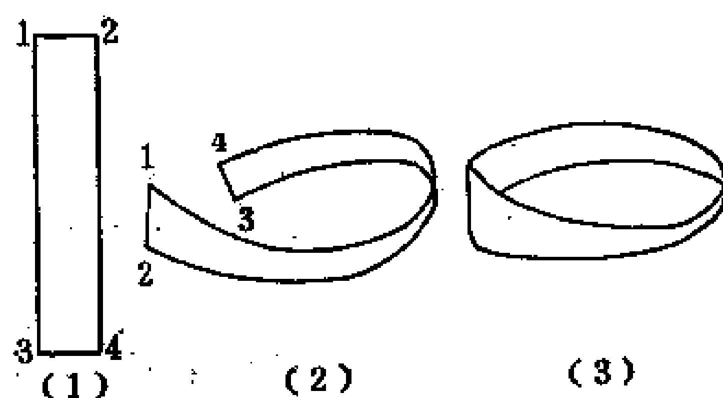
在曲面上引闭曲线，把不能把曲面分割成不连结的部分

的最大数叫做这个曲面的连通阶。比如，对于球面来说，连通阶就等于零。也就是说，任何闭曲线在球面上都能把球面分成不同的部分。在一个轮环面上可以找到两条闭曲线，而这两条闭曲线又没有把轮环面分成两部分，所以轮环面的连通阶就是2。看一看右边这张图就清楚了。图中是一个有两个洞的曲面，也就是轮环面，在这个曲面上可以引两条不相交的闭曲线 A 和 B，A 和 B 并没有分割曲面成不同部分，所以连通阶是2。



从连通阶也可以证明球面和轮环面虽然都是曲面，但是它们属于不同的拓扑构造。

上面所讲的曲面通常是指有两个面的曲面，就象一张纸有两个面一样。但是有的曲面却只有一个面。如下面这张图



表示的那样，把左边(1)这个面扭转一下，让标有1、2的一端对应于标有4、3的一端，象中间(2)图那样，把它粘合起来，

就得到右边(3)图。右边的曲面就只有一个面，叫做莫比乌斯(德国数学家，1790-1868)曲面。这种曲面就不能区分两面。比如，我们就不能用不同的颜色来涂满两个侧面。做一个有



趣的实验就可以看出这种曲面只有一个面。左图中的曲面有一条中线，沿着这条中线运行，从E点开始运行一圈，虽然没有经过它的边界，但是运行一圈后，回到的地方已经不是原来出发的那一面了。这种曲面的"表""里"无从分别，只有一面，因此叫做单面曲面。

（四）

在拓扑学中，关于曲面的定向也是一个拓扑的不变性质，也就是说可定向的曲面不能等价于不可定向的曲面。

拓扑变换的不变性很多，这里不再介绍了。现在我们谈谈拓扑变换的不变量。

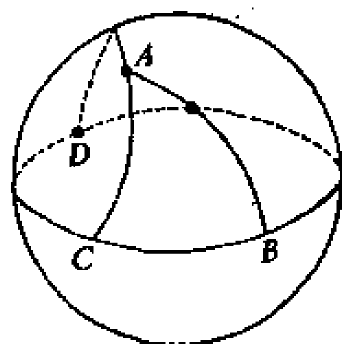
前面我们曾经提到多面体的一个重要性质，就是欧勒定理

$$F+V-E=2。$$

这个公式是拓扑学中一个普遍适用的公式。这个公式只是涉及到多面体的面、顶点、棱的数目，并不涉及到棱的长度和面的大小。

公式中的三个量F、V和E虽然不是同类量，但是运算结果却恒等于一个常量2。这个数在拓扑学中叫做欧勒示性数。

欧勒示性数就是拓扑变换的不变量。



例如不论怎样分割一球面，欧勒示性数不变。如图，把一个球面分成四个不同的三角形ABC、ABD、ACD、BCD。这样，就有六条不同的边AB、BC、CD、AC、AD、BD，有四个不同的顶点 A、B、C、D，所以 $F=4$，$V=4$，$E=6$，所以$F+V-E=2$。

（五）

同胚也是拓扑学中的一个重要概念。什么叫同胚呢？如果一个映射 f 是拓扑映射，那么集合 M 和它的象 $f(M)$ 就叫做同胚。

寻求判定拓扑空间 M 和 N 是否是同胚的一般方法，也是拓扑学的重要内容。当拓扑空间 M 和 M' 同胚的时候，如果 M 连通，那么 M' 也连通。

同胚的拓扑空间连通性一定成立的性质也是拓扑的不变性。

拓扑学的发展

（一）

拓扑学建立以后，由于其他数学学科的发展需要，它也得到了迅速的发展。特别是黎曼创立黎曼几何以后，他把拓扑学概念作为分析函数论的基础，更加促进了拓扑学的进展。

二十世纪以来，集合论被引进了拓扑学，为拓扑学开拓了新的面貌。拓扑学的研究就变成了关于任意点集的对应的概

念。拓扑学中一些需要精确化描述的问题都可以应用集合论来论述。

因为大量自然现象具有连续性，所以拓扑学具有广泛联系各种实际事物的可能性。通过拓扑学的研究，可以阐明空间的几何结构，从而掌握空间之间的函数关系。本世纪三十年代以后，数学家对拓扑学的研究更加深入，提出了许多全新的概念。比如，一致性结构概念、抽象距概念和近似空间概念等等。有一门数学分支叫做微分几何，后面将要介绍，这门学科是用微分工具来研究曲线、曲面等在一点附近的弯曲情况；而拓扑学是研究曲面的全局联系的情况，因此，这两门学科应当存在某种本质的联系。1945年，美籍中国数学家陈省身(1911-)建立了代数拓扑和微分几何的联系，并推进了整体几何学的发展。

（二）

拓扑学发展到今天，在理论上已经十分明显地分成了两个分支。一个分支是偏重于用分析方法来研究的，叫做点集拓扑学，或者叫做分析拓扑学。一个分支是偏重于用代数方法来研究的，叫做代数拓扑学。

现在，这两个分支又有统一的趋势。

拓扑学在泛函分析、李群论、微分几何、微分方程和其他许多数学分支中都有广泛的应用。

十四　微分几何学

什么是微分几何学？

（一）

我们已经研究了各种各样的几何学，它们之间有一些是研究的对象不同，有一些是研究的工具不同。比如，欧氏几何研究的工具是综合法，解析几何研究的工具是解析法。由于数学分析理论的产生，数学家又用这种理论和方法去研究几何学，促使一门新的几何学的产生，这就是微分几何学。

微分几何学就是运用数学分析的理论研究曲线（或曲面）在它一点邻域的性质，换句话说，微分几何是研究一般的曲线和一般的曲面“小范围”上的性质的。

（二）

微分几何学的产生和发展是和数学分析密切相连的。十八世纪初，法国数学家蒙日（1746-1810）首先把微积分应用到曲线和曲面的研究中去，并于1809年出版了他的《分析在几何学上的应用》一书，这是微分几何学最早的一本著作。

1827年，高斯发表了《关于曲面的一般研究》的著作，他的理论奠定了近代形式曲面论的基础。

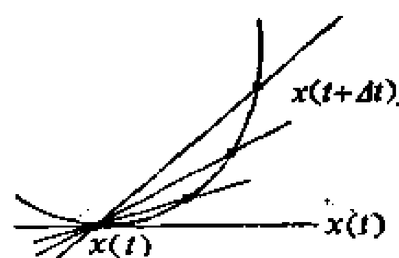
随后，由于黎曼几何学的发展和爱因斯坦广义相对论的建立，微分几何学在黎曼几何学和广义相对论中得到了广泛的应用，逐渐在数学中成为独具特点、应用广泛的独立学科。

本世纪以来，由于力学、微分方程和理论物理等学科的发展的需要，更进一步促进了微分几何学的发展。

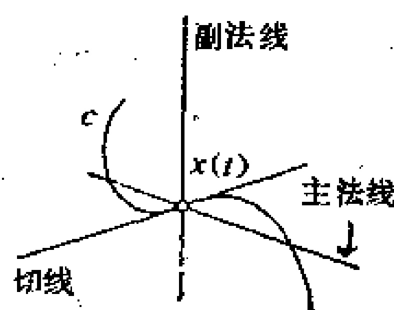
微分几何学的基本概念

(一)

微分几何学以光滑曲线(曲面)作为研究对象，所以整个微分几何学是由曲线的弧线长、曲线上一点的切线等概念展开的。首先应当明确的是，什么叫做曲线上一点的切线呢？看一看左图所示就明白了。曲线上的点 $x(t)$ 的切线是连接点 $x(t)$ 和它的无限接近的点 $x(t+\Delta t)$ 的割线，当 $\Delta t\to 0$ 的时候所处的极限位置的直线。



在微分几何里已经证明，切线是在点 $x(t)$ 处最贴近曲线的直线。同样，通过曲线 C 上一点 $x(t)$ 和它充分靠近的点 $x(t+\Delta_1 t)$、$x(t+\Delta_2 t)$，当 $\Delta_1 t$、$\Delta_2 t$ 独立地趋近零的时候，把这个极限位置的平面叫做在点 $x(t)$ 处曲线上的密切平面。在点 $x(t)$ 处最贴近的平面是在这一点的密切平面。



如右图所标明的，在点 $x(t)$ 处

的密切平面上，通过 $x(t)$ 并且垂直于切线的直线叫做在 $x(t)$ 点的曲线的主法线，通过 $x(t)$ 并且垂直于密切平面的直线叫做副法线。

既然微分几何是研究一般曲线和一般曲面的有关性质，如平面上曲线在一点的曲率和空间的曲线在一点的曲率就是微分几何中的重要讨论内容。什么叫曲线在一点的曲率呢？曲线上两点 M 和 Q 的切线正向的夹角 δ 和弧长 $\overset{\frown}{MQ}$ 的比，当 Q 趋于 M 的极限，也就是

$$\lim_{Q \to M} \frac{\delta}{\overset{\frown}{MQ}}$$

就叫作曲线在点 M 的曲率。

一般来说，一条曲线上的曲率不一定每点相等，如果要计算每一点的曲率就要用微分的方法。

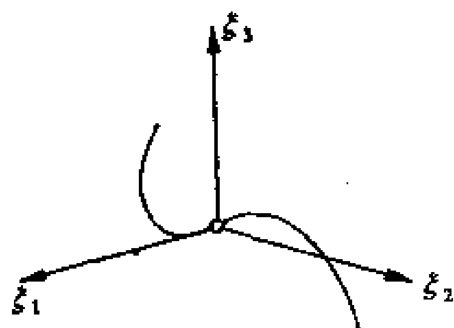
在曲面上有两个重要概念，就是曲面上的距离和角。比如，在曲面上由一点到另一点的路径是无数的，但这两点间最短的路径只有一条，叫做从一点到另一点的测地线。如确定在形如椭球似的地球上由一点到另一点的最短路线就是一个重要问题。

在微分几何里，要讨论怎样判定曲面上一条曲线是这个曲面的一条测地线，还要讨论测地线的性质等。讨论曲面在每一点的曲率也是微分几何的重要内容。

(二)

在微分几何中，为了讨论曲线上每一点邻域的性质，常常用所谓"活动标形的方法"。什么叫做"活动标形"呢？我们再

看一看第162页右下角的图，把曲线C上一点$x(t)$取作原点，把在这一点最贴近曲线C的切线作为第一轴，把主法线作为第二轴，第三轴是副法线。并且规定ξ_1、ξ_2、ξ_3所指定的方向分别作为切线、主法线、副法线的正向(如左图所示)。把这样的图形叫做曲线C的活动标形。对曲线上各点邻域性质的研究，就是通过在各点使用活动标形，随着曲线参数t的变化而得到一系列的标形，把这些标形总括在一起作为考察对象。这就是微分几何里研究曲线的一个重要方法。



在微分几何中，对任意曲线的"小范围"性质的研究，还可以用拓扑变换把这条曲线"转化"成对初等曲线的研究。

那么，什么叫做初等曲线呢？空间里的点集r，假设它是一个开的直线段，把它到空间的拓扑变换下的象叫做初等曲线。

为什么对任意曲线的研究经过拓扑变换总可以转化成对一个初等曲线的研究呢？

首先，对于集合M中的每一个点有一个邻域，集合M到空间如果存在一个拓扑变换f，我们就把变换f叫做是局部拓扑的。

如果一般曲线是简单曲线C(空间里的点集C如果是连通的，并且对其中的每一个点x有这样一个邻域，使C在这个邻域里的一部分是初等曲线，就把曲线C叫做简单的曲

线)，$\overline{C}$是通过局部拓扑变换f到空间中的象，那么，曲线$\overline{C}$上的点x的任一个邻域在变换下的对象，就叫做曲线C上的点$f(x)$的邻域。因为在点x的充分小的邻域里，变换f是拓扑的，所以曲线C上的点$f(x)$有一个是初等曲线的邻域。这样，对于任意曲线的"小范围"的性质的研究，都可以转化成对初等曲线来研究。同样，对于任何曲面的"小范围"性质的研究，也都可以转化成对初等曲面来研究。

在微分几何中，由于运用数学分析的理论，因此就可以在无限小的范围内略去高阶无穷小，一些复杂的依赖关系可以变成线性的，不均匀的过程也可以变成均匀的，这些都是微分几何特有的研究方法。

微分几何学的应用简介

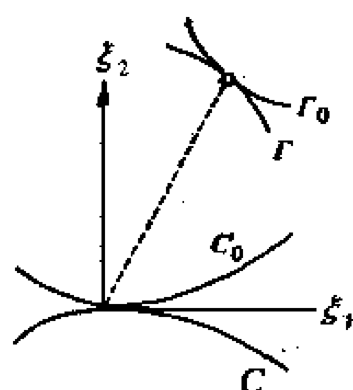
(一)

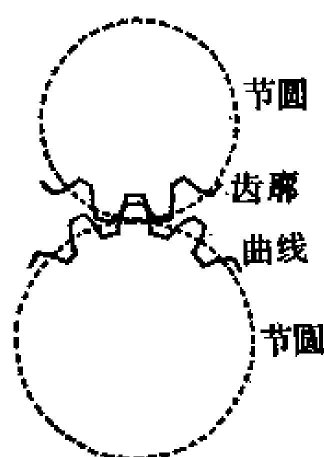
近代由于对高维空间的微分几何和对曲线、曲面整体性质的研究，使微分几何学同黎曼几何学、拓扑学、变分学、李群论等有了密切的关系，这些数学部门和微分几何互相渗透，已成为现代数学的中心问题之一。

微分几何学在力学和一些工程技术问题方面得到了广泛的应用，比如，在弹性薄壳结构方面，在机械的齿轮啮合理论应用方面，都充分应用了微分几何学的理论。

(二)

这里我们简单介绍微分几何学在齿轮啮合理论中的应用。





在微分几何里，讨论象上面左边的图表示的曲线 C_0 和 C，使曲线 C_0 在曲线 C 上无滑走地转动，固定在 C_0 的曲线 Γ_0 和固定在 C 的曲线 Γ 相切而转动。这时候，Γ_0、Γ 可以分别看作是两条曲线在转动时各瞬间的切点所画成的伴随曲线。可以证明 Γ_0 和 Γ 在切点的共同切线垂直于 C_0、C 的切点跟 Γ_0、Γ 的切点的连线。

这个问题的特殊情况就是把曲线 C_0、C 作为圆。上面讲的性质就成为齿轮啮合理论。如上面右边的图所示，齿轮的齿廓曲线有一条叫做节圆的固定曲线（圆），如果两个齿轮互相啮合而旋转，这些节圆中的一个在其他一个上无滑动地转动的时候，那么，固定在这些节圆的曲线就经常保持相切的状态。

十五　代数几何学

几何空间

(一)

空间的概念对我们来说是熟悉的。我们生活的空间是包含在上下、前后、左右之中的。如果需要描述我们所处的空间中的某一个位置，就需要用三个方向来表示，这个意思也就是说空间是“三维”的。

在数学中经常用到“空间”这个概念，它指的范围很广，一般地是指某种对象(现象、状况、图形、函数等)的任何集合，只要其中说明了“距离”或“邻域”的概念就可以了。所谓“维”的概念，如果我们所谈到的只是简单的几何图形，如点、线、三角形和多边形，那么，理解维的概念并不困难；一点的维度是零；一条线段的维度是1；一个三角形的面的维度是2；一个立方体内所有点的集合是三维的。

如果把维度的概念扩充到任意点集合上去的时候，维的概念就不那么容易理解了。比如，什么是四维空间呢？关于四维空间，我国古代有一些说法是很有意思的，最典型的就是对于“宇宙”两字的解释，古人的说法是“四方上下曰宇，往古

来今曰宙”，用现在的话来说就是，宇是东西南北上下，表示三维扩展的空间；宙是指从古到今延续不断的时间。四维空间和三维空间不同的地方，就是可以把时间当作和三个空间坐标并列的第四个坐标。

爱因斯坦认为每一瞬间三维空间中的所有实物在占有一定的位置就是四维的。比如，我们住的房屋就是由长度、宽度、高度和时间制约的。所谓时间制约，就是从盖房的时候算起，直到最后房子倒塌为止。另外，球体也可以看作是四维空间里的点。因为球体由四个条件决定它的位置和大小，就是球心的三个坐标和半径。一般来说，我们可以用实数 (x,y,z,t) 作为四维空间上的点的坐标。

（二）

根据上面的说法，几何学和其他学科研究的 n 维空间的概念，就可以理解成由空间的点的 n 个坐标 x_1、x_2、…、x_n 决定。这个空间的图形就定义成满足这个或那个条件的点的轨迹。比如，“n 维立方体”就定义成坐标满足不等式

$$a \leqslant x_i \leqslant b \qquad (i=1,2,\cdots n)$$

点的轨迹。“n 维球体”就定义成和已知点不大于已知数 R 的点的集合，可用解析式表示成

$$(x-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2 \leqslant R^2。$$

这里 $a_1 \cdots a_n$ 是球心的坐标。

一般来说，某个图形由 n 个条件给出，那么这个图形就是某个 n 维空间的点。至于这个图形到底是什么形象，我们想象不出来，这是无关紧要的。

几何学中的“维”的概念，实际上就是构成空间的基本元素，也就是点的活动的自由度，或者说是点的坐标。所谓 n 维空间，经常是用来表示超出通常的几何直观范围的数学概念的一种几何语言。

（三）

从上面的介绍也可以看出，几何中的元素可用代数中的实数来表示，比如，实数 x、有序实数对 (x, y) 或实数 (x,y,z) 就可以分别表示几何中直线上、平面或空间内的点。把所有满足线性方程

$$L(x,y)=ax+by+c=0 \qquad (a,b,c\text{ 是常数})$$

的所有有序实数对 x、y 的集合，代表一条直线。

对于代数问题如果通过几何的语言给予直观的描述，有时候可以给代数问题提示适当的解法。比如，如果要解下列关于 x、y、z 的三元一次联立方程式

$$\begin{cases} F(x,y,z)=ax+by+cz+d=0, \\ G(x,y,z)=a'x+b'y+c'z+d'=0, \\ L(x,y,z)=a''x+b''y+c''z+d''=0; \end{cases}$$

首先，我们把 $F=0$，$G=0$，$L=0$ 看作三维空间上的三个平面，于是解上述联立方程式的问题，从几何的角度看就变成求三平面的交点问题了。推广起来，一般地，解下列联立方程式

$$\begin{cases} L_1=(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0, \\ L_2=(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ L_n=(x_1,\cdots\cdots,x_n)=0 \end{cases}$$

的代数问题，如果用几何语言来叙述就变成为求 n 个平面 $L_1=0, L_2=0, \cdots, L_n=0$ 的交点问题了。

代数几何学

(一)

用代数的方法研究几何，继解析几何之后，又发展成几何学的另一个分支，这就是代数几何学。

代数几何学这门学科研究的对象是平面的代数曲线、空间代数曲线和代数曲面。

代数几何学的兴起，主要是由于求解一般的多项式方程组，开展了由这种方程组的解答所构成的空间，也就是所谓代数簇的研究。解析几何学的出发点是引进了坐标系来表示点的位置，同样，对于任何一种代数簇也可以引进坐标，因此，坐标法就成为研究代数几何学的一个有力的工具。

一般代数几何学的系统结构大约是在十九世纪末和二十世纪初建立的，但是，只是在这门学科中采用了拓扑和近世代数方法之后，才有了重大的进步。

(二)

代数几何学更一般地是研究 n 维空间中的代数流型，代数流型是代数几何学中的基本概念，下面我们简要地介绍一下。

在引入笛卡儿坐标系后，用方程

$$F(x,y)=0$$

表示的曲线叫做平面代数曲线。在这个方程中，$F(x,y)$ 是 x

和 y 的多项式。比如，直线和圆锥曲线就是代数曲线，而正弦曲线就不是代数曲线。

和上面所讲的相类似，在三维空间中用方程

$$F(x,y,z)=0$$

表示的曲线，叫做代数曲面。用方程组

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

表示的曲线，叫做空间代数曲线。其中，

$$F(x,y,z) \quad \text{和} \quad G(x,y,z)$$

都是 x、y、z 的多项式。

凡是它的坐标是下列方程组

$$\begin{cases}F_1(x_1、x_2、\cdots、x_n)=0,\\F_2(x_1、x_2、\cdots、x_n)=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_n(x_1、x_2、\cdots、x_n)=0\end{cases}$$

的解的点的集合，就叫做代数流型。其中，

$$F_1(x_1、x_2、\cdots、x_n),\cdots,F_n(x_1、x_2、\cdots、x_n)$$

都是未知量 x_1、$\cdots$、x_n 的多项式。

前面所讲的平面和空间代数曲线和代数曲面都是 n 维空间内代数流型的特殊情况。

（三）

可以认为代数几何学和一般的多项式方程组的解所构成的空间，和对所谓代数簇的研究是一致的。

在代数几何中要证明的定理多半是纯几何的，在论证中

虽然使用坐标法，但是采用的坐标多建立在射影坐标系的基础上。

在解析几何中，主要是研究一次曲线和曲面、二次曲线和曲面。而在代数几何学中主要是研究三次、四次的曲线和曲面以及它的分类，继而过渡到研究任意的代数流型。不过在代数几何中通常是从复数空间的射影几何概念开始，就是把无穷远点和具有复坐标的点都包括在研究的范围之内。

十六　常微分方程

关于微分方程的概念

（一）

方程对于学过中学数学的人来说是比较熟悉的；在初等数学中就有各种各样的方程，比如，有线性方程、二次方程、高次方程、指数方程、对数方程、三角方程和方程组等等。这些方程都是把要研究的问题中的已知数和未知数之间的关系找出来，列出包含某个未知数或几个未知数的一个或者多个方程式，然后去求方程的解。

但是，在实际工作中，常常出现一些特点和以上方程完全不同的问题。比如：

物质在一定条件下运动变化，要寻求它的运动、变化的规律；

某个物体在重力作用下自由下落，要寻求下落距离随时间变化的规律；

火箭在发动机推动下在空间飞行，要寻求它飞行的轨道（在空间中的一条曲线），等等。

物质运动和它的变化规律在数学上是用函数关系来描述

的，因此，这类问题就是要去寻求满足某些条件的一个或者几个未知的函数。也就是说，凡是这类问题都不是简单地去求一个或者几个固定不变的数值，而是要求一个或者几个未知的函数。

解这类问题的基本思想和初等数学解方程的基本思想很相似，也是要把所研究的问题中已知函数和未知函数之间的关系找出来，从列出包含未知函数的一个或者几个方程中去求得未知函数的表达式。但是无论在方程的形式、求解的具体方法、求出解的性质等方面，都和初等数学中的解方程有许多不同的地方。

在数学上，解这类方程，还要用到微分和导数的知识，因此，凡是表示未知函数和未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程，叫做微分方程。

(二)

微分方程差不多是和微积分同时先后产生的，苏格兰数学家耐普尔(1550-1617)创立对数的时候，就已求出微分方程 $\frac{d(a-y)}{dt}=y$ 的近似解了。牛顿也在建立微积分学的同时，对最简单的微分方程用级数来求解。后来瑞士数学家雅科布·贝努利、欧勒、法国数学家克雷洛(1713-1765)、达兰贝尔、拉格朗日等人又不断地研究和丰富了微分方程的理论。

牛顿研究天体力学和机械力学的时候，利用了微分方程这个工具。正是他研究天体运动的微分方程，从理论上得到行星运动规律。后来，法国天文学家勒维烈(1811-1877)和英国天文学家亚当斯(1819-1892)使用微分方程各自计算出

那时尚未发现的海王星的位置。这些都使数学家愈益深信微分方程在认识自然改造自然方面的巨大力量。

微分方程的理论逐步完善的时候，利用它就可以精确地表述事物变化所遵循的基本规律，只要列出相应的微分方程，有了解（数值地或者定性地）方程的方法，就可以把这种或那种运动应该如何处置提供了办法。微分方程也就成了最有生命力的数学分支之一。

常微分方程的内容

（一）

我们已经知道微分方程的概念了，本章要介绍的是常微分方程。

那么什么是常微分方程呢？如果在一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，这个方程就叫做常微分方程，也可以简单地叫做微分方程。

微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0。$$

在这个方程中，x 是自变量，y 是 x 的未知函数：$y=y(x)$，而 $y',\cdots,y^{(n)}$ 依次是函数 $y=y(x)$ 对 x 的一阶、…、n 阶导数。在方程中出现的各阶导数中最高的阶数叫做微分方程的阶。比如微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y \qquad 是二阶的，$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}-2x=0 \qquad 是一阶的。$$

（二）

关于常微分方程的一些基本概念，这里举例加以说明。比如，

求在点 x 处的切线斜率都等于已知函数 $2x$ 的函数。

假设未知函数是 $y=f(x)$，在点 x 处的切线的斜率是 $\frac{dy}{dx}$，于是 $y=f(x)$ 所应满足的微分方程是

$$\frac{dy}{dx}=2x,$$

因为它含有一阶的导数 $\frac{dy}{dx}$，所以这个方程就是一阶微分方程。我们由

$$dy=2xdx,$$

两端积分变成

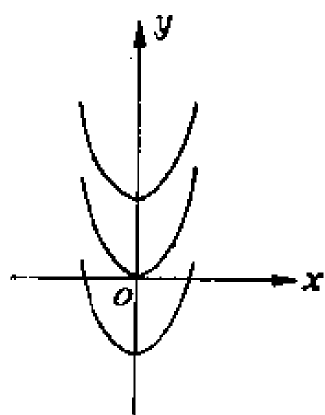
$$\int dy=\int 2xdx,$$

得

$$y=x^2+c$$

就是所要求的函数。其中 c 是任意常数，它起着参数作用。函数

$$y=x^2+c$$



表示这个一阶微分方程的通解，它的几何意义就象左图所示的那样是单参数的曲线族。

曲线族中任意一条曲线是这个微分方程的积分曲线，因为它在点 x 处的切线斜率都等于已知函数 $2x$，可见它的

解不只是一个或几个，而是有无穷多个。如果所求未知函数过平面上一定点 (x_0,y_0)，那么只能确定一个解，就是在一切积分曲线中选择一条曲线。比如，可由

$$y=\int_{x_0}^{x} 2x\,dx+y_0$$

解出，也就是

$$y=x^2+(y_0-x_0^2)。$$

或者由曲线

$$y=x^2+c$$

过定点 (x_0,y_0)，应该有

$$y_0=x_0^2+c,$$

所以
$$c=y_0-x_0^2。$$

这样也得到这个方程的一个解，

$$y=x^2+(y_0-x_0^2)。$$

这个例子已经使我们初步认识到常微分方程的形式，它是含有自变量 x、未知函数 y 和它的导数的一个关系式，它的解法和微积分学有密切的联系，解的性质是表示无穷多个一元函数或一个一元函数。

现在再举一个自由落体问题来介绍常微分方程。



假设质量是 m 的物体只受重力的作用而自由降落，求它的运动方程。

怎样求它的自由降落的方程呢？我们可以把物体降落的铅垂线作为 s 轴，方向向下，也就是向着地心的方向，如右图表示的那样。我们可以假设物体在时刻

t 的位置是 $S=s(t)$，由二阶导数的力学意义，可以知道$\frac{d^2s}{dx^2}$是物体沿 os 轴方向的加速度。由物理学又知道重力的作用下物体加速度的方向是向下的，它的大小是 g，于是对于质量是 m 的物体，在运动的任何时间内，应该满足等式

$$m\frac{d^2s}{dx^2}=mg。$$

可以看出，等式中含有未知函数 $s(t)$的二阶导数，这就是二阶微分方程，是描述质点按它的自由下落过程的函数 $s(t)$ 所应该满足的微分方程，从而把决定质点运动的力学问题化成微分方程求解的数学问题。

解这个方程可以用积分的方法。

$$\int d^2s=\int gdt^2,$$

就是 $$ds=(gt+c_1)dt;$$

再积分一次 $$\int ds=\int(gt+c_1)dt,$$

也就是 $$S=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2。$$

这就是我们熟悉的自由落体公式，其中 c_1、c_2 是两个任意常数，也就是说，这是通解，表示自由落体的运动方程是通解形状。

如果开始的时候，时间 $t=0$，这个时候物体的位置就在 $s_0=s(0)$，它的速度

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0}=v_0,$$

那么， $$c_1=v_0, \qquad c_2=s_0。$$

于是自由落体的运动方程是：

$$S=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0。$$

（三）

上面我们用两个例子讲述了常微分方程的一些浅显的内容，从解这两个例子中可以看出通解的特点，比如，一阶微分方程的解含有一个任意常数，二阶微分方程的解含有两个任意常数。现在要提出来的是，是不是 n 阶微分方程的解中含有 n 个任意常数呢？

一般地说，n 阶微分方程的解中含有 n 个任意常数。也就是说，微分方程的解中含有任意常数的个数和方程的阶数相同，这种解就叫做微分方程的通解。通解构成一个函数族。

如果根据实际问题要求出其中满足某种指定条件（叫做初始条件）的解来，那么求这种解的问题叫做定解问题，对于一个常微分方程的满足定解条件的解叫做特解。上面举例提到的

$$y=x^2+(y_0-x_0^2),$$

和

$$S=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$$

就都是特解。

对于高阶微分方程有时候可以用引入新的未知函数，把它化为多个一阶微分方程组。比如

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,\frac{dy}{dx}),$$

是一个二阶微分方程，要把它化为一阶微分方程组，可以令

$$\frac{dy}{dx}=z,$$

那么

$$\frac{dz}{dx}=f(x,y,z),$$

于是得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z,\\ \dfrac{dz}{dx}=f(x,y,z)。\end{cases}$$

它和原方程是同解的。

常微分方程的特点

(一)

常微分方程的概念、解法和其他理论很多，比如，方程和方程组的种类及解法、解的存在性和唯一性、奇解、定性理论等等。下面就方程的解的有关几点简述一下，以了解常微分方程的特点。

求通解在历史上曾作为微分方程的主要目标，我们从上面所讲的内容也可以看到，一当求出通解的表达式，就容易从中得到问题所需要的特解。也可以由通解的表达式，了解对某些参数(这些参数在应用上往往表征仪器或者机械的特性)的依赖情况，便于参数取值适宜，使它对应的解具有所需要的性能，还可以有助于进行关于解的其他研究。

后来的发展表明，能够求出通解的情形并不多，在实际应

用上所需要的倒是要求满足某种指定条件的特解。当然，通解是有利于研究解的属性的，但是人们已把研究重点移到定解问题上来。

（二）

一个微分方程是不是有特解呢？如果有，又有几个呢？这是微分方程论中一个最基本的问题，数学家把它归纳成基本定理，叫做存在和唯一性定理。因为如果没有解，而我们要去求解，那是没有意义的；如果有解而又不是唯一的，那又不好确定。因此，存在和唯一性定理对于微分方程的求解是十分重要的。

微分方程中有很大部分方程求不出十分精确的解，而只能得到近似解。当然，这个近似解的精确程度是比较高的。另外还应该指出，用来描述物理过程的微分方程以及由实验测定的初始条件也是近似的。这种近似之间的影响和变化，还必须在理论上加以解决。

现在，微分方程在很多学科领域内起着重要的作用，自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究，等等，这些问题都可以化为求微分方程的解，或者化为研究解的性质。应该说，应用微分方程理论已经取得了很大的成就，但是，它的现有理论也还远远不能满足需要，还有待进一步的发展，使这门学科的理论更加完善。

十七　偏微分方程

什么是偏微分方程？

（一）

在前面《常微分方程》这章里，已经讲述了什么是微分方程，读者也已经知道，如果在一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，这个方程叫做常微分方程，也简称微分方程。这里要介绍的是，如果在一个微分方程中出现有多元函数的偏导数；或者说如果未知函数和几个变量有关，而且方程中出现未知函数对几个变量的导数，那么这种微分方程叫做什么呢？叫做偏微分方程。

在科学技术日新月异地发展的过程中，人们研究的许多问题用一个变量的函数来描述已经显得不够了，不少问题要用多个变量的函数来描述。比如，从物理角度来说，物理量有不同的性质，温度、密度等是用数值来描述的叫做纯量；速度、电场的引力等，不仅在数值上有所不同，而且还具有方向，这些量叫做向量；物体在一点的张力状态的描述出的量叫做张量，等等。这些量不仅和时间 t 有关系，而且和空间坐标 x、y、z 也有联系，这就要用多个变量的函数来表示。

应该指出，对于所有可能的物理现象用某些多个变量的函数来表示，只能是理想化的，如介质的密度，实际上"在一点"的密度是不存在的。而我们把在一点的密度看作是物质的质量和体积的比当体积无限缩小的时候的极限，这就是理想化的。介质的温度也是这样。这样就产生了研究某些物理现象的理想了的多个变量的函数方程，这种方程就是偏微分方程。

(二)

偏微分方程这门学科产生于十八世纪，欧勒在他的著作中最早提出了弦振动的二阶方程，随后不久，法国数学家达兰贝尔也在他的著作《论动力学》中提出了特殊的偏微分方程。这些著作当时没有引起多大注意。1746 年，达兰贝尔在他的论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》中，提议证明无穷多种和正弦曲线不同的曲线是振动的模式。这样就由对弦振动的研究开创了偏微分方程这门学科。

后来，和欧勒同时代的瑞士数学家丹尼尔·贝努利(1700-1782）也研究了数学物理方面的问题，提出了解弹性系振动问题的一般方法，对偏微分方程的发展起了比较大的影响。拉格朗日也讨论了一阶偏微分方程，丰富了这门学科的内容。

偏微分方程得到迅速发展是在十九世纪，那时候，数学物理问题的研究繁荣起来，许多数学家都对数学物理问题的解决作出了贡献。这里应该提一提法国数学家傅立叶（1768-1830），他年青的时候就是一个出色的数学学者，他在从事热流动的研究中，写出了《热的解析理论》，在文章中他提出了三

维空间的热方程，也就是一种偏微分方程。他的研究对偏微分方程的发展的影响是很大的。

偏微分方程的内容

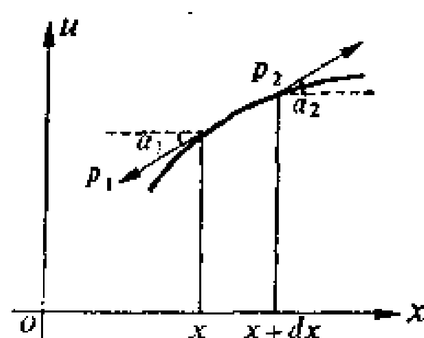
(一)

偏微分方程是什么样的？它包括哪些内容？这里我们可从一个例子的研究加以介绍。

弦振动是一种机械运动，当然机械运动的基本定律是质点力学的 $F=ma$，但是弦并不是质点，所以 $F=ma$ 并不适合用在弦振动的研究上。然而，如果我们把弦细细地分成若干个极小极小的小段，每一小段抽象地看作是一个质点，这样，我们就可以应用 $F=ma$ 了。

弦是指又细又长的弹性物质，比如弦乐器所用的弦就是细长的柔软的、带有弹性的。演奏的时候，弦总是绷紧着具有一种张力，这种张力大于弦的重量几万倍。当演奏的人用薄片拨动弦或者用弓在弦上拉动，虽然只引起所接触到的一段弦振动，但是由于张力的作用，传播到使整个弦振动起来。

现在我们设想没有重量的弦（因为弦的重量只是张力的几万分之一，所以它的重量可以忽略不计）绷紧，在不振动的时候是一根直线，象左图所示的那样取这条直线作为x轴，弦上各点的横向位移记作 u 。毫无疑问，位移 u 是依赖于 x 的



不同而变化的，同时又依赖于时间 t 的改变而改变。因此，u 是 x 和 t 的二元函数，也就是 $u(x,t)$。

把弦细细地分成极小极小的一段一段，设 $(x,\ x+dx)$ 是其中的某一极小的一段，长度是

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(du)^2},$$

它只受邻段的拉力 P_1 和 P_2 的作用(这种拉力等于弦的张力，方向沿着弦的切线方向)，没有纵向的运动，这样纵向合力是

$$P_2\cos\alpha_2-P_1\cos\alpha_1=0, \tag{1}$$

在小振动的条件下， $ds\approx\sqrt{(dx)^2}=dx$。

如果以 ρ 表示单位长度的弦的质量，那么 ρdx 就是某一极小的一段弦的质量。

按照质点力学的 $F=ma$，可以得到这段弦的横向运动方程，

$$P_2\sin\alpha_2-P_1\sin\alpha_1=\rho\cdot dx\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}。 \tag{2}$$

从三角学和微积分学中可以知道，当

$$\alpha_1\approx0, \qquad \alpha_2\approx0$$

的时候，

$$\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2\approx1,$$

$$\sin\alpha_1\approx\mathrm{tg}\alpha_1=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x},$$

$$\sin\alpha_2\approx\mathrm{tg}\alpha_2=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x+dx},$$

把它们代入(1)、(2)中，那么在小振动的条件下，得到某一段弦的纵向平衡方程和横向运动方程，

$$\begin{cases} P_2-P_1=0, \\ P_2\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x+dx}-P_1\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x}=\rho\cdot dx\cdot\dfrac{\partial^2u}{\partial t^2}。\end{cases}$$

在这个方程组中不难看出 $P_1=P_2$，这说明弦的张力在整根上是常数，和弦的某处 x 值无关，也和时间 t 无关，不妨假设是 P，那么

$$P\left[\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x+dx}-\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x}\right]=\rho\cdot dx\cdot\frac{\partial^2u}{\partial t^2},$$

$$\frac{P\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x+dx}-\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x}\right]}{dx}=\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}。$$

所以，弦振动方程就是

$$\rho\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-P\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=0。$$

这就是以 x 和 t 作为自变量的偏微分方程。

(二)

偏微分方程有很多种类型，一般包括椭圆型偏微分方程、抛物型偏微分方程、双曲型偏微分方程和不属于这三类的其他方程。

上述的例子是弦振动方程，它属于数学物理方程中的波动方程，也就是双曲型偏微分方程。标准形式的双曲型偏微分方程是

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0。$$

关于其他类型的方程和对它们的解法，这里就不叙述了。

(三)

偏微分方程的解一般有无穷多个，但是在解决具体的物

理问题的时候，必须从中选取所需要的解，因此，还必须知道附加条件。因为偏微分方程是同一类现象的共同规律的表示式，仅仅知道这种共同规律还不足以掌握和了解具体问题的特殊性，所以就物理现象来说，各个具体问题的特殊性就在于研究对象所处的特定条件，就是初始条件和边界条件。

拿上面所举的弦振动的例子来说，对于同样的弦的弦乐器，如果一种是以薄片拨动弦，另一种是以弓在弦上拉动，那么它们发出的声音是不同的。原因就是由于在“拨动”或“拉动”的那个“初始”时刻的振动情况不同，因此产生后来的振动情况也就不同。

天文学中也有类似情况，如果要通过计算预言天体的运动，当然必须知道这些天体的质量，同时除了牛顿定律的一般公式以外，还必须知道我们所研究的天体系统的初始状态，就是在某个起初时间，这些天体的分布以及它们的速度。总而言之，在解决任何数学物理的问题的时候，总会有类似的附加条件。

就弦振动来说，弦振动方程只表示弦的内点的力学规律，对弦的端点就不成立，所以在弦的两端必须给出边界条件，也就是考虑研究对象所处的边界上的物理状况。边界条件也叫做边值问题。比如上面例子中，设弦长是 l，它的两端 $x=0$ 和 $x=l$，固定在平衡位置上，显然在振动的时候，两端的位移是 0，就是

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0\ 。$$

当然，客观实际中也还是有“没有初始条件的问题”，如稳

定场问题(静电场、稳定浓度分布、稳定温度分布等),也有“没有边界条件的问题”,如着重研究不靠近两端的那段弦,就抽象的成为无边界的弦了。

(四)

在数学上,初始条件和边界条件叫做定解条件。偏微分方程本身是表达同一类物理现象的共性,是作为解决问题的依据;定解条件却反映出具体问题的个性,它提出了问题的具体情况。方程和定解条件合为一体,就叫做定解问题。

求偏微分方程的定解问题可以先求出它的通解,然后再用定解条件确定出函数。但是,一般说来,在实际中通解是不容易求出的,用定解条件确定函数更是比较困难的。

偏微分方程的解法还可以用分离系数法,也叫做傅立叶级数;还可以用分离变数法,也叫做傅立叶变换或傅立叶积分。分离系数法可以求解有界空间中的定解问题,分离变数法可以求解无界空间中的定解问题。也可以用拉普拉斯变换法去求解一维空间的数学物理方程的定解。对方程施行拉普拉斯变换可以转化成常微分方程,而且初始条件也一并考虑到,解出常微分方程后进行反演就可以了。关于这几种方法,有兴趣的读者可以参阅有关的专著。

应该指出,偏微分方程的定解虽然有以上各种解法,但是我们不能忽视由于某些原因有许多定解问题是不能严格解出的,只可以用近似方法求出满足实际需要的近似程度的近似解。常用的有变分法和有限差分法。变分法是把定解问题转化成变分问题,再求变分问题的近似解。有限差分法是把定

解问题转化成代数方程组，然后用电子计算机进行计算。还有一种方法是更有意义的，这就是模拟法，它用另一个物理的问题实验研究来代替所研究某个物理问题的定解。因为虽然物理现象本质不同，但是抽象地表示在数学上是同一个定解问题，如研究某个不规律形状的物体里的稳定温度分布问题，在数学上是拉普拉斯方程的边值问题，由于求解比较困难，可作相应的静电场或稳恒电流场实验研究，测定场中各处的电势，从而也解决了所研究的稳定温度场中的温度分布问题。

随着物理科学所研究的现象在广度和深度两方面的扩展，偏微分方程的应用范围更加广泛。从数学自身的角度看，偏微分方程的求解促使数学需要在函数论、变分法、级数展开、常微分方程、代数、微分几何等各方面发展，偏微分方程变成数学的中心。

十八　概率论和数理统计

从随机现象谈起

(一)

在自然界和现实生活中，一切事物都是相互联系和不断发展的。在它们彼此间的联系和发展中，根据它们是否有必然的因果关系，可以分成截然不同的两大类：一类是确定性的现象。这类现象是在一定条件下，必定会导致某种确定的结果。举例来说，在标准大气压下，水加热到100°C，就必然会沸腾。又如，把铁加热到1530°C的时候，必然会熔化成液态。事物间这种联系是属于必然性的。通常的自然科学各学科就是专门研究和认识这种必然性，寻求这类必然现象的因果关系，把握它们之间的数量规律，以达到认识世界和改造世界的目的。

另一类是不确定性的现象。这类现象是在一定条件下，它的结果是不确定的。举例来说，同一工人在同一车床上加工同一种零件若干个，它们的尺寸总会有些差异。又如，在同样条件下，进行小麦品种的人工催芽试验，各颗种子的发芽情况也不尽相同，有强弱和早晚之别等等。为什么在相同的一

定条件下，会出现这种种不确定的结果呢？这是因为，我们说的"相同条件"是指一些主要条件来说的，除了这些主要条件外，还会有许多次要条件和偶然性因素影响着结果。而这些次要的、偶然起作用的因素又是人们无法事先一一能够掌握的。正因为这样，我们在这一类现象中，就无法用必然性的因果关系，对个别现象的结果事先作出确定的答案。事物间这种关系是属于偶然性的，这种现象叫做偶然现象，或者叫做随机现象。

(二)

在自然界，在生产、生活中，随机现象十分普遍，也就是说随机现象是大量存在着的。比如：拿北京地区来说，测量每年七月份的天气平均气温，每年都各有差异，不完全相同，而且也不能准确地预测来年七月份的平均气温。这样，"北京七月份平均气温"就是随机现象。又如，同一名工人，用同一台车床在同一条件下(同材料、同一操作规程)加工一种标准长度150毫米的零件等现象，也是随机现象。因此，我们说：随机现象就是，在同样条件下，多次进行同一试验或调查同一现象，所得结果不完全一样，而且无法准确地预测下次所得结果的现象。随机现象这种结果的不确定性，是由于一些次要的、偶然因素影响所造成的。

随机现象表面上看来，似乎是杂乱无章的、没有什么规律的现象。但实践证明，如果同类的随机现象大量重复出现，它的总体就呈现出一定的规律性。

举例来说，掷一枚均匀的五分硬币，有两种可能性，一种

是“国徽面”朝上、一种是“伍分面”朝上。每掷一次，很难断定是哪种结果。但是如果多次重复地掷这枚硬币，就会越来越清楚地发现“国徽面”朝上的次数和“伍分面”朝上的次数却大体相同这样的规律性。

在同样条件下，同一名工人加工同一种零件，每一件的长和标准长 150 毫米都有差异，但是如果检验他所加工的许多同一零件的时候，就会发现这些零件中比标准长 150 毫米大的件数和比标准长 150 毫米小的件数大体相同，而且和标准长相比，相差过大的占少数，相差不多的占多数。

大量同类随机现象所呈现的这种规律性，随着我们观察的次数增多而愈加明显。我们把这种由大量同类随机现象所呈现出来的集体规律性，叫做统计规律性。概率论和数理统计就是研究大量同类随机现象的统计规律性的数学学科。

概率论的产生和发展

(一)

概率论产生于十七世纪，本来是由保险事业的发展而产生的，但是来自赌博者的请求，却是数学家们思考概率论的一些特殊问题的源泉。

早在 1654 年，有一个赌徒梅累向当时的数学家帕斯卡提出一个使他苦恼了很久的问题：“两个赌徒相约赌若干局，谁先赢 m 局就算获胜，全部赌本就归胜者。但是，当其中一个人赢了 $a(a<m)$局，另一个人赢了 $b(b<m)$局的时候，赌博中止。问：赌本应当如何分法才合理？”三年后，也就是 1657

年，荷兰著名的天文、物理兼数学家惠更斯（1629－1695）企图自己解决这一问题，结果写成了《论机会游戏的计算》一书，这就是最早的概率论著作。

近几十年来，随着科技的蓬勃发展，概率论大量应用到国民经济、工农业生产及各学科领域。许多兴起的应用数学，如信息论、对策论、排队论、控制论等，都是以概率论作为基础的。

（二）

概率论和数理统计可以算作一门随机数学分支，它们是联系密切的同类学科，我们现在就是把它们合起来作为一门分支进行介绍的。但是，应该指出，概率论、数理统计、统计方法又都各有它们自己所包含的不同内容。

概率论——是根据大量同类随机现象的统计规律，对随机现象出现某一结果的可能性作出一种客观的科学定义，对这种出现的可能性大小作出数量上的描述；比较这些可能性的大小，研究它们之间的联系，从而形成一整套数学理论和方法。

数理统计——是应用概率的理论来研究大量随机现象的规律性；对通过科学安排的一定数量的试验所得到的统计方法给出严格的理论论证；并判定各种方法应用的条件以及方法、公式、结论的可靠程度和局限性。使我们能从一组样本来判定是否能以相当大的概率保证某一判断是正确的，并可以控制发生错误的概率。

统计方法——是以上提供的方法在各种具体问题中的具

体应用，它不去注意这些方法的理论根据、数学论证。因而就有象森林统计学、纺织工业统计、教育统计、生物统计、天气预报的统计方法等等。

（三）

由于随机现象在人类的实际活动中大量存在，概率统计随着现代工农业、近代科技的发展而不断发展，因而形成了许多重要分支。如：随机过程（其中重要的有“马尔可夫过程”和“平衡过程”）、信息论、极限理论、试验设计、多元分析等。

概率统计的应用，在国民经济、自然科学各具体领域中又是非常广泛的。如现代物理对微观世界的研究、无线电通讯和导航、生产过程的质量控制、气象水文地震的预报、企业事业的管理、教育质量的统计、地理、物理、化学、生物的研究都离不了这个方法。

应当指出，概率统计在研究方法上也有它的特殊性，和其他学科不同的主要特点有下列几点：

第一，由于随机现象的统计规律是一种集体规律，必须在大量同类随机现象中才能呈现出来，所以，进行观察、试验、调查就是概率统计这门学科研究方法的基石。但是，要注意它作为数学学科的一个分支，也是具有本学科的定义、公理、定理的。而这些定义、公理、定理也是确定的，不存在任何随机性。只不过这些定义、公理、定理是来源于自然界的随机现象罢了。

第二，在研究概率统计中，使用的是“由部分推断全体”的统计推断方法。这是因为它研究的对象——随机现象的范围

是很大的，在进行试验、观测和调查的时候，不可能也不必要全部进行，只能取其一部分（就是样本）进行试验、观测。但是由这一部分资料所得出的一些结论，要去推断在全体范围（就是总体）内这些结论的可靠性。

第三，要特别指出，随机现象的随机性，是指试验、调查之前来说的。就是说，随机现象是对于某一试验、调查之前，我们说它可能出现不确定的结果。而真正做了试验之后，那么对于每一次试验来说，它只能得到这些不确定的结果中的某一个确定结果。我们研究这一现象的时候，应当注意在试验以前能不能对这一现象找出它本身的内在规律。

概率论的内容

（一）

概率论作为一门数学分支，它所研究的内容一般包括随机事件的概率、统计独立性和条件概率、随机变量、概率分布、正态分布和方差等等。至于概率论的一些分支，这里就不介绍了。

现在我们先介绍概率论最基本的一些概念和符号。

随机事件一般用大写字母 A、B、C 等来表示，叫做事件 A、事件 B 等。

必然发生的事件，叫做必然事件，用符号 U 表示。

不可能发生的事件，叫做不可能事件，用符号 V 表示。

（二）

事件之间的相互关系，一般也用符号表示。比如，

“$(A+B)$”表示事件 A 和事件 B 至少发生其中一件的事件。

“$A\cdot B$”表示事件 A 和事件 B 同时发生的事件。

事件 A 和事件 B 不能同时发生，叫做互斥事件。

如果事件 A_1+A_2 是必然事件，而且 A_1 和 A_2 互斥，就把 A_1（或 A_2）叫做 A_2（或 A_1）的对立事件，并用符号表示成

$$\overline{A}_1=A_2，\text{或}A_1=\overline{A}_2。$$

如果 n 个事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 能够满足这样的条件：彼此互斥；$B_1+B_2+\cdots+B_n$ 是必然事件，就是 $(B_1+B_2+\cdots+B_n)=U$，那么，就把这 n 个事件叫做完全事件系。

（三）

概率是随机事件发生的可能性的数量指标。什么叫做概率呢？这里还要介绍其他几个概念。

如果随机事件 A 在 n 次独立重复的随机试验中出现了 k 次，$0\leqslant k\leqslant n$，那么，k 叫做事件 A 在 n 次试验中的频数，$\frac{k}{n}$ 叫做频率。

人们通过长期试验，发现如果试验次数很大，频率虽然仍有微小的波动，但是比较明显地稳定在某一个固定的常数附近。这样就得到结论：事件 A 发生的频率 $\frac{k}{n}$ 将稳定在一个常数 b 附近。我们就把常数 b 叫做事件 A 的概率。一般用符号表示成

$$P(A)=b。$$

很明显，必然事件 U 的概率是

$$P(U)=1,$$

不可能事件 V 的概率是

$$P(V)=0。$$

也可以断定，对于任何一件事件 A 的概率 $P(A)$ 一定是介于 0 和 1 之间，也就是

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1。$$

（四）

在实际中，有一类随机现象，具有两个特点：第一，只有有限个可能的结果（比如 n 个）；第二，各个结果发生的可能性是相等的。具有这两个特点的随机现象，叫做"古典概型"。对于古典概型，用不着做大量试验，只要确定事件 A 包含了多少个可能的结果，比如是 m 个，那么就可以得出下面的公式：

$$P(A)=\frac{m}{n}。$$

如果事件 A 和事件 B 不可能同时出现，它们就叫互斥事件，互斥事件的概率有以下的公式：

$$P(A+B)=P(A)+P(B)。$$

在计算某一事件的概率比较复杂的时候，可以间接地通过先计算它的对立事件的概率而求出事件的概率。这是因为相互对立的事件 A 和 $\overline{A}$ 显然是互斥的，并且 $(A+\overline{A})$ 是必然事件。因此，

$$P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})=1,$$

那么，又可以得到

$$P(A)=1-P(\overline{A})。$$

如果事件 A 的发生或不发生并不影响事件 B 的发生，反过来，事件 B 的发生或不发生也不影响事件 A 的发生，就把

事件 A 和事件 B 叫做相互独立事件。独立事件的概率有以下公式：

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)。$$

（五）

在实际工作中，往往有一些更为复杂的问题，比如，在某一事件 B 已经发生的条件下，要求事件 A 发生的概率。这种概率就叫做条件概率。一般用符号记成 $P(A|B)$。要求这一条件概率，只要知道 $P(B)$ 和 $P(AB)$ 就可以了。因为

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}。$$

根据这个公式，显然有另一条件概率公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}。$$

一般地，就有公式

$$P(AB)=P(A|B)\cdot P(B)=P(B|A)\cdot P(A)。$$

在某些情况下，给出了条件概率要求计算无条件概率，这时候就要用到全概率公式。比如，有 n 个基本事件 B_1、B_2、…、B_n 组成一个完全事件系，那么，对于任何事件 A，都有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(A|B_i)\cdot P(B_i)。$$

这就是全概率公式。

如果把全概率公式代入条件概率公式：

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(AB_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)},$$

再把其中的 $P(AB_i)$ 用 $P(A|B_i)P(B_i)$ 代换，就可得

$$P(B_i|A)=\frac{P(AB_i)}{P(A)}=\frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A|B_i)P(B_i)}。$$

这个公式叫做贝叶斯公式。它应用广泛，在解决一些复杂问题的时候，常常要用到它。

还有一类问题的特点和其他问题不同，它每一次试验中 $P(A)$ 不受其他各次试验的影响，它的结果也不依赖其他各次试验的结果，也就是各次试验是独立的；另外，事件 A 和对立事件 $\bar{A}$ 在同一次试验中，总要出现而且只能出现其中一件。遇到这类问题，如果知道事件 A 在一次试验中发生的概率是 p，一般就用贝努利公式可以求得在 n 次试验中事件 A 出现 k 次的概率 $P_k(A)$。贝努利公式是

$$P_k(A)=C_n^k(p)^k\cdot(1-p)^{n-k}。$$

(六)

在客观世界中，存在大量随机现象，随机现象产生的结果构成了随机事件，这些前面已经叙述了。那么，随机现象的各个结果能不能用变量来描述呢？实践证明，能够用变量来描述，这就产生了新的概念，叫做随机变量。

随机变量有“有限”和“无限”的区分，一般又根据变量的取值情况分成离散型随机变量和非离散型随机变量等。

一切可能的取值能够按一定次序一一列举，这样的随机变量叫做离散型随机变量。

如果可能的取值充满了一个区间，无法按次序一一列举，这种随机变量就叫做非离散型随机变量。

（七）

怎样全面描述离散型随机变量的统计规律呢？这就要研究概率的分布。

如果有随机变量 ξ，它可能取的值是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，而且取每一个值的概率分别是 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 列成表就是

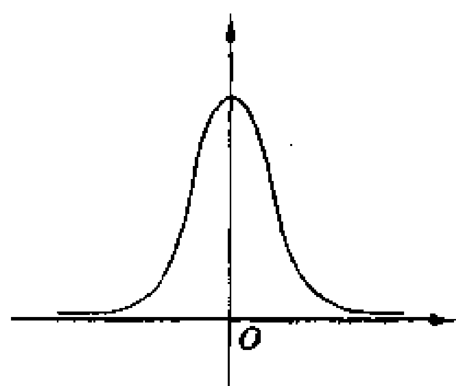
ξ	$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, x_n$
概率	$p_1, p_2, \cdots\cdots, p_{n-1}, p_n$

其中，$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$，这就是概率分布。

在离散型随机变量的概率分布中，比较简单而应用广泛的是二项式分布。二项式分布只适用于 n 是一个确定的试验次数，如果重复试验次数 $n \to \infty$，$p \to 0$，而且 $np \to \lambda$（一个常数）的时候，就不能用二项式分布了，在概率论中有一种分布叫做泊松(法国数学家 1781－1840)分布，泊松分布的公式还附有数值表可以在计算时参考使用。

（八）

如果随机变量是连续的，那么对于每一个连续随机变量，都有一个分布曲线，实践和理论都已证明：有一种特殊而常用的分布，它的分布曲线是有规律的，这就是正态分布。



如左图所示，正态分布曲线的特征是：可以表示成一条钟形曲线，有一个最高点，在这点两边对称地下降。分布曲线取决于这个随机变量的一些表

征数，其中最重要的是平均值和差异度。平均值也叫做数学期望，差异度也就是标准方差。

（九）

一般地，如果用 X 表示随机变量，它的概率分布是

$$P(X=x_i)=p_i,$$

它的平均值就是

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i。$$

那么，

$$(X-\bar{x})^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$$

就是偏离的平方的总和，这个“偏离的平方总和的平均值”就叫做方差。记成

$$D_x^2=\overline{(X-\bar{x})^2}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 p_i。$$

这个式子的平方根

$$D_x=\sqrt{\overline{(X-\bar{x})^2}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 P_i},$$

就叫做标准方差。

方差 D_x^2 或者标准方差 D_x 都刻画了随机变量取值和平均值的接近程度，所以也叫做离散度。方差越小，说明随机变量取值的差异越小，它的平均值代表性越强。

数理统计的内容

（一）

数理统计包括抽样、适线问题、假设检验、方差分析、相关

分析等方面的内容。

我们对一个研究对象进行调查或者试验的时候，虽然全面调查是最完善的，但是有很多研究对象不允许这样做，有时候这样做也是不必要的，特别是有许多调查和试验是带有破坏性的，全面调查和试验就更不可能了。比如，工业上要检查灯泡的耐用时间，就要把灯泡烧掉，如果全面试验就要把所生产的灯泡都烧掉。又比如，农业上要在小麦没有成熟前估计产量，就要把小麦收来对它的株数、穗数、粒数、粒重进行计算，如果全面调查，就要把小麦全收割下来。这些都是不允许的。因此，调查只能用“抽查一部分”进行试验的方法。在数理统计中这种方法就叫做抽样，抽出的部分叫做子样或者叫做样本。被检查对象的全体相对于子样来说就叫做母体，也叫做总体。

抽样检查是要通过对子样的调查，来推断总体的全面情况。究竟抽多少合适，这是十分重要的。抽多了会浪费物资、人力和时间，抽少了代表性又不大。因此，在抽样检查中就生产了“小子样”理论，这是一种在子样很小的情况下，进行分析判断的理论。

(二)

适线问题也叫做曲线拟合。在实际中，有些问题需要根据积累的一些经验数据来求出理论分布曲线，从而对整个问题得到了解。这样就要遇到：根据什么原则求出理论分布曲线？有时候同一问题中可以求出几种不同的曲线，如何比较各种曲线的优劣？如果选配好曲线以后，又怎样判断它和理

论分布的真值相差多少呢？这些问题，就属于数理统计中的适线问题。

假设检验是指在用数理统计方法检验产品的时候，先作出一种假设，这个假设是我们初步希望了解的数值，叫做原假设。再根据抽样观察的结果在一定可靠程度上对原假设来作出判断，是接受或者拒绝原假设。这种方法就叫做假设检验。

（三）

方差分析也叫做离差分析。在工农业生产中，会遇到生产过程不稳定，但是找不出原因的情况，这样就需要进行试验来判断哪些因素在起作用。或者改变生产条件的时候，判断对产量质量影响比较大的是哪些因素。方差分析就是用方差的概念去分析由少数试验就可以作出的判断。

根据观察某些现象所得的一组资料，运用数学方法，确定现象的某些量之间相关程度的大小以及用怎样的函数关系相联系，叫做相关分析。

我们知道方差分析可以指出哪些因素有比较大的影响，哪些因素没有影响，但是不能指出某一因素的影响程度。相关分析的理论解决了这个问题，它不仅可以定性地指出哪些因素有密切的关系，而且可以定量地指出这些因素之间量的变化关系。

十九 运筹学

"田忌赛马"的道理

(一)

相传战国时代的齐国，有一个大将名叫田忌。有一天，齐王提出来要和他赛马。并且规定：两人各从自己的上等马、中等马、下等马中各选出一匹马来参加比赛，比赛结果，输一匹马就要被罚千金。

当时，很多人都替田忌担心。认为按照当时同等级的马的实力来说，田忌的马都不如齐王的，这次比赛田忌输三千金是肯定的了。

田忌门下有一个幕僚名叫孙膑，这个人是一个很有头脑的军事家。他给田忌出了一个主意，让田忌用自己的下等马对齐王的上等马，用上等马对齐王的中等马，用中等马对齐王的下等马，这样就能只输一匹而赢两匹保证最后获胜。田忌采用了孙膑的办法。

比赛的结果，果然象孙膑预料的那样，田忌的下等马输了，上等马和中等马都取得了胜利，田忌不但不输三千金，反而两胜一负，净赢千金。

（二）

田忌赛马的例子说明在已有的条件下，经过筹划、安排，选择一个最好的方案，就会取得最好的结果。

可见，筹划安排是十分重要的。在数学上，利用数学工具谋求最优安排的一种方法叫做运筹学。

运筹学的思想早在古代就已经产生了。敌我双方交战，要克敌制胜就要在了解双方情况的基础上，作出最优的对付敌方的办法。我国古代就有“运筹帷幄之中，决胜千里之外。”的说法。

但是作为一门数学学科，用纯数学方法来解决最优方法的选择安排，却是晚得多了。也可以说，运筹学是在本世纪四十年代才开始兴起的一门分支。

（三）

运筹学主要研究经济活动和军事活动中能用数量来表达的有关策划、管理方面的问题。当然，随着客观实际的发展，运筹学的许多内容不但研究经济和军事的活动，有些已深入到日常生活中。运筹学可以根据问题的要求，通过数学上的分析、计算，得出各种各样的结果，最后提出综合性的合理安排，以达到最好的效果。

随着科学技术和生产的发展，运筹学已渗入到很多领域里，发挥了越来越重要的作用。运筹学本身也在不断地发展，现在已经是一个包括好几个分支的数学部门。

运筹学包括的分支有规划论、对策论、排队论等等。本章下面各节的内容就是简要地介绍这些数学分支。

规 划 论

(一)

规划论的研究对象是计划管理工作中有关安排和估值的问题，解决的主要问题是在给定条件下，按某一衡量指标来寻找安排的最优方案。在生产中常用的方法是线性规划。

什么叫做“线性规划”呢？这里举例说明一下。

有一个工厂生产 A 和 B 两种产品，已经知道每生产一公斤产品 A，要用煤 9 吨、电力 4 千瓦、劳力 3 个（按工作日计算），所得的经济价值是 7 万元；而每生产一公斤产品 B，要用煤 4 吨、电力 5 千瓦、劳力 10 个，所得到的经济价值是 12 万元。而这个工厂现有的条件是 360 吨煤、电力 200 千瓦，劳力 300 个，问在这种条件下应该安排生产产品 A、B 各多少公斤，才能得到最大的经济效果？根据这个问题的要求，工厂计划人员可以列出数学式子，用数学语言表示。比如，设这个工厂生产产品 A、B 分别是 x_1、x_2 公斤，而 x_1、x_2 应该满足下列约束条件：

$$\begin{cases} 9x_1+4x_2\leqslant 360, \\ 4x_1+5x_2\leqslant 200, \\ 3x_1+10x_2\leqslant 300, \\ x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0。\end{cases}$$

并且使所创造的财富 $f(x_1,x_2)=7x_1+12x_2$ 的值达到最大。$f(x_1,x_2)$ 也叫做目标函数。

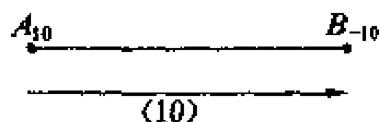
从这里可以看出，不论约束条件或者目标函数都是呈线

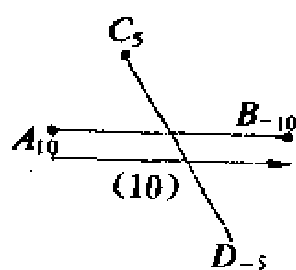
性关系的。因此，在规划问题中，凡最后能归结成上面形式的数学问题，就叫作线性规划问题。要解决上述类型的问题，从理论上讲都要解线性方程组。因此解线性方程组的方法（比如叠代法）以及关于行列式、矩阵的知识，在线性规划中都是非常必要的数学工具。

（二）

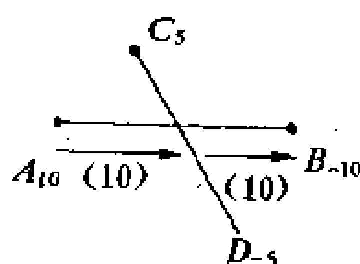
线性规划有多种方法，我国数学工作者在实践中创造了物资调运的图上作业法，这也是属于规划论的，下面作简要的介绍。

要在图上作业，首先要会画流向图，比如 A 是发货点发货 10 吨，B 是收货点收货 10 吨，那么，可象右图那样标出，A 点发货量标10，B点收货量标－10，箭头表示流向，箭头旁边的数字(10) 叫做流量。我们规定，流向必须画在前进方向路线的右侧。并且不能通过路线上的收、发点和交叉点（如下图所示)，当在一段路上有几个同方向流向的时候，应把它们合并。如下图中有“正确”二字所标出的。

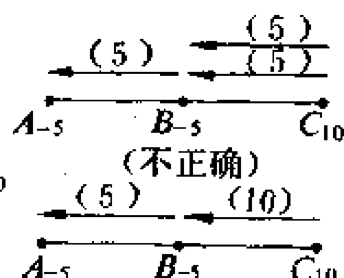




（不正确）



（正确）



（正确）

明确了上面的规定，就可以把收货、发货情况标在图上，然后我们研究最好的调运方案。

要求最好的方案，就要避免运输中的浪费现象。运输中浪费一般讲一种是由于对流，一种是由于迂回。所谓对流就是在一段路线上有同一种物资往返运输。所谓迂回，是指在组成一个圈的运输线中，物资由甲地运到乙地不是走小半圈，而是走大半圈。理论上已经证明，一个物资调运方案，如果没有对流和迂回，它一定是运输力最节省的方案，也就是最优方案。

图上作业法正是寻求这种最优方案的一种方法。它的特点是简单、方便、容易掌握。

对于物资调运问题，还可以用表上作业的方法，这种方法是通过画许多数表来说明具体步骤和原理。

(三)

规划论除了用在物资调运工作以外，还可用在工厂中对机床负荷分配、工业材料的合理下料等寻求最优方案。在农村中还可以对作物布局、劳力调配、麦场、机井、仓库设置等问题提出科学的建议；此外，在水利、建筑中对合理调配土方，实施多、快、好、省的施工组织工作都有一定的作用，甚至对于选择最好的邮政投递路线，合理分配邮区等问题，线性规划都是一个好的工具。

虽然规划论的基本思想和一些简单的方法很早就已产生，但规划论的迅速发展是在本世纪四十年代前后，第二次世界大战时期，生产实践需要和计算机的发展，大大刺激了规划

论的发展，迫切需要研究物资调运、下料及生产组织等问题的数学方法。因此，促使对规划论在理论上进行了一些本质性的研究，致使能实际求解的线性规划的规模愈来愈大。并且规划论和其他数学分支的联系也愈来愈多，应用面也日益广泛。

对非线性的规划问题，就是目标函数和约束条件的数学方程中有非线性的方程的规划问题，数学工作者也展开了研究。这类非线性规划问题在实际中很多，数学模型比较复杂。比如还有一种规划问题和时间有关，叫做“动态规划”。近年来，在工程控制、技术物理和通讯中的最佳控制问题中，已经成为经常使用的重要工具。

排　队　论

(一)

排队论是运筹学的又一个分支，它又叫做随机服务系统理论。它是研究各式各样的排队现象的。

人们排队是常见的现象，不仅人要排队，东西也要排队，比如，码头的船只等待装卸，停车场的出租汽车等待租乘的旅客等等。

这里有一个问题是，怎样协调“服务机构”和“服务对象”之间的矛盾。比如，多增加一些出租汽车，旅客就方便了，但是服务机构成本增加了；相反地，服务机构成本下降，但是旅客排队的时间就延长了。设法寻求能够达到服务标准的服务机构的最少设备，使得在满足服务对象条件之下，服务机构的

花费最为经济；就是排队论要解决的主要问题。

(二)

因为排队现象是一个随机现象，因此在研究排队现象的时候，主要是采用研究随机现象规律的概率论作为本学科的主要工具。此外，还要用到微积分和微分方程。

排队论把它所要研究的问题形象地描述成顾客（比如电话用户、发生故障的机床等等）来到服务台前（比如电话线路维修工人等等）要求接待。如果"服务台"已被其他顾客占用，那么就得排队等待。另一方面，"服务台"也时而空闲，时而忙碌。排队论这门学科就是通过数学方法求顾客等待时间、排队长度等的概率分布。

排队论的应用不仅是上面所讲的这一类问题，象水库用水量的调度、存储问题、生产流水线的安排、铁路分车场的调度、电力网的设计等，也都可以运用排队论的基本理论来进行计算，从而获得最合理的解决办法。

对　策　论

(一)

对策论也叫做博弈论，本章开头所讲的田忌赛马取胜的例子，就是典型的对策论问题。作为运筹学的一门分支，对策论的发展也只有几十年的历史。系统地创建这门学科的数学家，现在一般公认是美籍匈亚利人冯·诺伊万(1903-1957)。

最初用数学方法研究"对策现象"是在国际象棋中开始的。国际象棋中的三种走法(自始至终的一种走法)必定存在

一种：不管黑方怎样行动，白方总能取胜的走法；或者不管白方怎样行动，黑方总能取胜的走法；或者有一方总能保证达到和局的走法。

数学家们把对于有利害冲突的双方在竞争性的活动中是否存在自己制胜对方的最优策略？怎样找出这些策略？双方的损耗情况等，用数量关系来描述，并寻找双方最优策略，这些，就构成了这门对策论的研究内容。

（二）

由于研究双方冲突、制胜对策的问题，所以这门学科在军事方面有着十分重要的应用。比如，在战斗中，甲方用一定数量的兵力向乙方进攻，可能有几条进攻的路线；乙方也会部署一定数量的兵力，并且布置在甲方可能进攻的路线上。在这种情况下，甲方为了使进攻获得最大战果，就要考虑集中一路或分几路进攻；乙方呢，也要依据甲方可能进攻的路线部署自己的兵力。也就是说，甲乙双方都要寻求自己的最好的斗争方法，在数学术语上叫做寻求最优纯策略。

在第二次世界大战中，同盟国的空军和海军就曾经运用对策论的理论解决了对轴心国的潜艇活动、舰队运输和兵力部署调配的侦察问题，取得了对敌斗争的胜利。

近年来，有些国家的数学家还对水雷和舰艇、歼击机和轰炸机之间作战、追踪等问题进行了研究，提出了追逃双方都能由决策行动的数学理论。

（三）

对策论发展的趋势已和人工模拟结合起来，据报导，国外

已研究了一种下棋机，就是把国际象棋的各种可能走法都编成程序，送入电子计算机，对方走一步，电子计算机就选择事先编好的最好的一步，电子计算机的走法是根据对策论的理论进行了全面的计算的，所以下棋机的走法都是最优的走法，据说已达到了国际象棋大师级的水平。

对策论现在已经深入到经济、文体、教育等许多领域，比如，工厂的管理问题，球队的比赛问题都应用了对策论的理论。这些说明对策论的应用是十分广泛的。

二十 符号的逻辑——数理逻辑

从"四色问题"获得解决谈起

(一)

在拓扑学那章里，我们曾经介绍过"四色问题"，1976年，这道世界著名的数学难题之一，获得了证明，这件事轰动了数学界。当美国伊利诺斯大学的两位数学家把他们的研究成果发表的时候，当地的邮局在所发出的邮件上都加盖了"四色足够"的特制邮戳，以庆祝这一难题的获得解决。

关于"四色问题"，据说最早是由德国数学家莫比乌斯在1840年提出来的，1850年，英国数学家棣么甘也提出了"四色足够"的猜想，1870年，英国人凯莱也提出了同样的问题。但是，一直没有人能够给出证明。后来，有人说他已经找到了这个问题的证明，但是很快就被别人发现他的证明在推理过程中有错误，他的所谓证明只能对五色来说是正确的，关于"四色足够"他仍没有证出来。

(二)

问题的提出经过了一百多年，许多感兴趣的数学家为它作了种种努力，探索了许多办法，但是一直没有完全解决。直

到1976年，两位美国数学家阿佩尔和黑肯在高速电子计算机的协助下才证明了这一猜想的正确性。

这个问题的解决有些什么特点呢？最大的特点是和传统的数学证明不大一样。证明过程中的一些关键思想是通过电子计算机实现的。据报导在证明“四色足够”的时候，数学家利用电子计算机花了1200小时，作了上百亿个逻辑判断，才全部解决问题。这是应用数理逻辑和计算方法的一项非凡的成就。

（三）

通过“四色问题”的证明，使人们更加重视数理逻辑这门学科。那么，什么是数理逻辑呢？

逻辑是探索、阐述和确立有效推理的原则的学科，最早是由古希腊学者亚里士多德创建的。用数学方法研究关于推理、证明等问题的一门学科就叫做数理逻辑。它也叫做符号逻辑。

数理逻辑的产生

（一）

利用计算的方法来代替人们思维中的逻辑推理过程，这种想法早在十七世纪就有人提出过。莱布尼茨就曾经设想能不能创造出一种“通用的科学语言”，可以把推理的过程象数学一样利用公式来进行计算，从而得出正确的结论。由于当时的社会条件，他的想法并没有实现。但是他的思想却是现代数理逻辑部分内容的萌芽，从这个意义上说，莱布尼茨的思

想可以说是数理逻辑的先驱。

1847年，英国数学家布尔（1815-1864）发表了《逻辑的数学分析》，建立了“布尔代数”，才创造了一套符号系统，利用符号来表示逻辑中的各种概念。布尔建立了一系列的运算法则，利用代数的方法研究逻辑问题，初步奠定了数理逻辑的基础。

（二）

十九世纪末二十世纪初，数理逻辑有了比较大的发展，1884年，德国数学家弗雷格（1848-1925）出版了《数论的基础》一书，在书中引入量词的符号，使得数理逻辑的符号系统更加完备。

对这门学科的建立做出贡献的，还有美国人皮尔斯，他也在著作中引入了逻辑符号。从而使现代数理逻辑最基本的理论基础逐步形成，成为一门独立的学科。

数理逻辑的内容

（一）

数理逻辑包括哪些内容呢？这里我们先介绍它的两个最基本的也是最重要的组成部分，也就是“命题演算”和“谓词演算”。

命题演算是研究关于命题如何通过一些逻辑连接词构成更复杂的命题以及逻辑推理的方法。什么是命题呢？命题是指具有具体意义的又能判断它是真的或者是假的句子。在数学中，命题一般都用 A、B、…、P、Q、…等来表示。比如，

A：北京是中国的首都。

B：凡是直角都相等。

P：二乘二等于五。

Q：煤球是白的。

这几个句子都是能够判断它的真假和具有具体意义的句子，所以叫做命题。从句子中，我们可以判断出命题 A、B 是真的，命题 P、Q 是假的。

通常用"t"表示命题的真，用"f"表示命题的假。命题的真和假，叫做命题的真假值，或者叫做真值。这样，上述四个命题中，命题 A、B 的真值是 t，命题 P、Q 的真值就是 f。

这几个命题都是由简单的句子构成的，我们就把它们叫做简单命题。如果把简单的命题通过一些逻辑连接词连起来，就可以组成复合命题。

最基本的五个连接词是："或"、"与"、"非"、"若……，则……"、"当且仅当"。这些连接词分别用符号"$\vee$"、"$\wedge$"、"$\neg$"、"$\rightarrow$"、"$\leftrightarrow$"① 来表示。比如，

命题 P：小王今天去上班。

命题 Q：小王今天去看电影。

那么命题 $P\vee Q$ 就表示：小王今天去上班或去看电影，读作"P 或 Q"。命题 $P\wedge Q$ 表示：小王今天去上班和看电影，读作"P 与 Q"。命题 $\neg P$ 表示原命题 P 的否定，也就是小王今天不去上班，读作"非 P"。

---

① 表示连接词的符号有很多种，这里所举的只是常用的一种。

再举例来说，如

命题 X：三角形 ABC 有两个角相等。

命题 Y：三角形 ABC 是等腰三角形。

那么命题 $X\to Y$ 读作"若 X 则 Y"，表示如果三角形有两个角相等，则它是等腰三角形。命题 $X\longleftrightarrow Y$ 读作"X 当且仅当 Y"，表示三角形有两个角相等当且仅当它是等腰三角形。

（二）

经过逻辑连接词的作用所形成的复合命题，它的真值是什么呢？它和原简单命题的真值又有什么关系呢？一般可以通过列表来表示，这种表叫做真值表。下面就是五种真值表：

命题	P	$\neg P$
真值	t	f
	f	t

P 是真的，$\neg P$ 就是假的。

P	Q	$P\vee Q$
t	t	t
t	f	t
f	t	t
f	f	f

P 和 Q 有一是真的，$P\vee Q$ 就是真的。

P	Q	$P\wedge Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	f

P 和 Q 同时都是真的，$P\wedge Q$ 才是真的。

P	Q	$P\to Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	t
f	f	t

只有当 P 是真的，Q 是假的时候，

$P\to Q$ 是假的，其余都是真的。

P	Q	$P\longleftrightarrow Q$
t	t	t
t	f	f
f	t	f
f	f	t

只有当 P 和 Q 同是真的或同是假的

时候，$P\longleftrightarrow Q$ 才是真的。

对于任意的复合命题都可以用上述真值表作根据，然后列出表来加以分析。

（三）

如果我们把命题看作运算的对象，如同代数中的数字、字母或代数式，而把逻辑连接词看作运算符号，象代数中的“＋、－、×、÷”那样，那么由简单命题组成复合命题的过程，就可以当作逻辑运算的过程，也就是命题演算。

这样的逻辑运算也同代数运算一样具有一定的性质，满足一定的运算规律。例如满足交换律、结合律、分配律，同时也满足逻辑上的同一律、吸收律、双否定律、狄摩根定律、三段论定律等等。利用这些定律，我们可以进行逻辑推理，可以简化复合命题，可以推证两个复合命题是不是等价，也就是它们的真值表是不是完全相同等等。

两个命题 P 和 Q 等价，用符号“$\equiv$”表示，也就是 $P\equiv Q$。比如，逻辑运算满足：

交换律：对任何命题 P、Q 都有

$$P\vee Q\equiv Q\vee P, P\wedge Q\equiv Q\wedge P。$$

结合律：对任何命题 P、Q、R 都有

$$\begin{cases}(P\vee Q)\vee R\equiv P\vee(Q\vee R),\\(P\wedge Q)\wedge R\equiv P\wedge(Q\wedge R)。\end{cases}$$

分配律：对任何命题 P、Q、R 都有

$$\begin{cases}P\vee(Q\wedge R)\equiv(P\vee Q)\wedge(P\vee R),\\P\wedge(Q\vee R)\equiv(P\wedge Q)\vee(P\wedge R)。\end{cases}$$

同一律：对任何命题 P 都有

$$\begin{cases}P\vee f\equiv P,\\P\vee t\equiv t;\end{cases}$$

$$\begin{cases}P\wedge f\equiv f,\\P\wedge t\equiv P。\end{cases}$$

余补律：对任何命题 P 都有

$$P\vee\neg P\equiv t,\quad P\wedge\neg P\equiv f。$$

（四）

命题演算的一个具体模型就是逻辑代数。逻辑代数也叫做开关代数，它的基本运算是逻辑加、逻辑乘和逻辑非，也就是命题演算中的“或”、“与”和“非”，运算对象只有两个数 0 和 1，相当于命题演算中的“真”和“假”。

逻辑代数的运算特点同电路分析中的开和关、高电位和低电位、导电和截止等现象完全一样，都只有两种不同的状

态，因此，它在电路分析中得到广泛的应用。

利用电子元件可以组成相当于逻辑加、逻辑乘和逻辑非的门电路，就是逻辑元件。还能把简单的逻辑元件组成各种逻辑网络，这样任何复杂的逻辑关系都可以由逻辑元件经过适当的组合来实现，从而使电子元件具有逻辑判断的功能。因此，在自动控制方面有重要的应用。

（五）

谓词演算也叫做命题函项演算。在谓词演算里，把命题的内部结构分析成具有主词和谓词的逻辑形式，由命题函项、逻辑连接词和量词构成命题，然后研究这样的命题之间的逻辑推理关系。

什么叫做命题函项呢？命题函项是指除了含有常项以外还含有变项的逻辑公式。常项是指一些确定的对象或者确定的属性和关系，变项是指一定范围内的任何一个，这个范围叫做变项的变域。命题函项和命题演算不同，它无所谓真和假。如果以一定的对象概念代替变项，那么命题函项就成为真的或假的命题了。

举例来说，如果“x是偶数”是一个命题函项，其中x是变项，“是偶数”是常项。我们把一些数6、8、10代入x，那么这个命题就成为真命题，因为“6是偶数”、“8是偶数”、“10是偶数”都是真的。如果把一些数3、5代入x，那就成为假命题了，因为“3是偶数”、“5是偶数”都是假的。

量词最常用的有全称量词和存在量词两种。全称量词是“任何x，……”一般用符号“$\forall x$”表示，比如，“$\forall x(x^2>0)$”表

示"任何x，$x^2>0$"，也就是表示"凡数的平方都大于0"。存在量词是"有x，…"一般用符号"$\exists x$"表示，比如，"$\exists x(5<x<7)$"表示"有x，$5<x<7$"，也就是表示"有数介于5和7之间"。

命题函项加上全称量词或者存在量词，那么它就成为全称命题或者特称命题了。比如，"x是奇数"是命题函项，加上全称量词后变成"凡x是奇数"就是全称命题，加上存在量词后变成"有x是奇数"就是特称命题。

数理逻辑的发展

(一)

数理逻辑这门学科建立以后，发展比较迅速，促成它发展的因素也是多方面的。比如，非欧几何的建立，促使人们去研究非欧几何和欧氏几何的无矛盾性，就促进了数理逻辑的发展。

集合论的产生是近代数学发展的重大事件，但是在集合论的研究过程中，出现了一次被称做数学史上的第三次大危机。这次危机是由于发现了集合论的悖论引起的。什么是悖论呢？悖论就是逻辑矛盾。集合论本来是论证很严格的一个分支，被公认是数学的基础。1903年，英国唯心主义哲学家、逻辑学家、数学家罗素（1872-1970）却对集合论提出了以他名字命名的"罗素悖论"，这个悖论的提出几乎动摇了整个数学基础。罗素悖论中有许多例子，其中一个很通俗的例子，现在简述如下：

某乡村有一位理发师，他宣布一项原则：他给而且只给本

村那些不给自己刮脸的人刮脸。那么就产生了一个问题，理发师给他自己刮脸吗？如果他给自己刮脸，那就违背了他的原则；如果他不给自己刮脸，按照他的原则，他又应该由他自己来刮脸。这就产生了矛盾。

用集合论的形式可以把这类例子表示成，设N是一个集合，它是由那些不属于元素 x 自身的元素组成的，记成 $x\notin x$，就是

$$N=\{x|x\notin x\}。$$

那么，N是否属于集合N呢？如果N不属于N，按照定义不属于自身的元素应该属于集合N，就是$N\in N$，这就产生了矛盾。如果N属于N，就是属于它自身，那么按照定义它不应该是集合N的元素，就是 $N\notin N$，这也是矛盾的。这就是说，无论在什么情况下总是自相矛盾的。

悖论的提出，促使许多数学家去研究集合论的无矛盾性问题，从而产生了数理逻辑的一个重要分支——公理集合论。

(二)

非欧几何的产生和集合论悖论的发现，证明数学本身还存在许多问题，为了研究数学系统的无矛盾性问题，需要以数学理论系统的概念、命题、证明等作为研究对象，研究数学系统的逻辑结构和证明的规律，这样又产生了数理逻辑的另一个分支——证明论。

数理逻辑新近还发展了许多新的分支，如递归论、模型论等。递归论主要是研究可计算性的理论，它和电子计算机的发展和应用有密切的关系。模型论主要是研究形式系统和数

学模型之间的关系。

（三）

数理逻辑近年来发展特别迅速，主要的原因是这门学科对于数学其他分支如集合论、数论、代数、拓扑学等等的发展有重大影响，特别是对新近形成的计算机科学的发展起了推动作用。反过来，其他学科的发展也推动数理逻辑的发展。

正因为它是一门新近兴起而又发展很快的学科，所以它本身也存在许多问题有待于深入研究。现在许多数学家正针对数理逻辑本身的问题，进行研究解决。

总之，这门学科的重要性已经十分明显，它已经引起了更多的人的关心和重视。

二十一　计 算 数 学

什么是计算数学？

（一）

现代的科学技术发展十分迅速，它们有一个共同的特点，就是都有大量的数据问题。

比如，发射一颗探测宇宙奥秘的卫星，从卫星设计开始到发射、回收为止，科学家和工程技术人员、工人就要对卫星的总体、部件进行全面的设计和生产，要对选用的火箭进行设计和生产，这里面就有许许多多的数据要进行准确的计算。发射和回收的时候，又有关于发射角度、轨道、遥控、回收下落角度等等需要进行精确的计算。

又如，在高能加速器里进行高能物理实验，研究具有很高能量的基本粒子的性质、它们之间的相互作用和转化规律，这里面也有大量的数据计算问题。

计算问题可以说是现代社会各个领域普遍存在的共同问题，工业、农业、商业、交通运输业、医疗卫生、文化教育等等，那一行那一业都有许多数据需要计算，通过数据进行分析，以便掌握事物发展的规律。

（二）

研究计算问题的解决方法和有关数学理论问题的一门学科就叫做计算数学。

计算数学属于应用数学的范畴，它主要研究有关的数学和逻辑问题怎样由数字自动计算机加以有效解决。

电子计算机产生以后，几十年来，随着科技事业的发展，计算机已由第一代发展到现在的第四代，并且正在研制计算速度更快的第五代，可说是日新月异、进展迅猛异常。加上生产实践需要计算的问题越来越复杂，这些都大大地推动了计算数学的发展。

计算数学的基本内容

（一）

计算数学原来包括计算方法和程序设计两大部分。近年来，由于电子计算机科学的发展，程序设计这部分内容进展迅速，而且已趋向于独立地成为一门分支学科，下面我们单列成章加以介绍，这里就只简要叙述计算方法。

计算方法也叫做数值计算方法或者数值数学。主要内容包括代数方程、线性代数方程组、微分方程的数值解法，函数的数值逼近问题，矩阵特征值的求法，最优化计算问题，概率统计计算问题等等，还包括解的存在性、唯一性、收敛性和误差分析等理论问题。

（二）

我们知道五次及五次以上的代数方程不存在求根公式，

因此，要求出五次以上的高次代数方程的解，一般只能求它的近似解，求近似解的方法就是数值分析的方法。对于一般的超越方程，如对数方程、三角方程等等也只能采用数值分析的办法。怎样找出比较简捷、误差比较小、花费时间比较少的计算方法是数值分析的主要课题。

在求解方程的办法中，常用的办法之一是迭代法，也叫做逐次逼近法。

迭代法的基本思想是这样的：

对于一般的一元方程总可以写成$f(x)=0$的形式。我们把它改写成

$$x=g(x)$$

的形式。然后选择一个已知数x_0作为所求方程的第一个近似解，我们把这个解叫做初始值。当然，这个解可能和要求的真正解有很大的误差。

我们把x_0代入方程中，得到

$$x_1=g(x_0)。$$

x_1作为第二个近似解，再把x_1代入方程中，又得到

$$x_2=g(x_1)。$$

这样继续下去，就有

$$x_3=g(x_2),$$

$$x_4=g(x_3),$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}=g(x_n)。$$

如果$|x_{n+1}-x_n|<\varepsilon$的时候，我们就停止迭代。这里$\varepsilon$是

一个预先给定的数，它根据问题要求的精确度来确定。比如，要所求的近似解精确到小数点后四位小数，可取$\varepsilon=0.00005$。如果$|x_{n+1}-x_n|$确实小于ε，我们就可以认为第$n+1$个近似解x_{n+1}就是所求方程的近似解。这个时候解$x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}$的序列是收敛的。

（三）

上面所讲的迭代法的计算是比较简单的，是比较容易进行的。但是，这种办法一定能求出近似解吗？也就是说，解的序列x_0，x_1，…，x_{n+1}一定收敛吗？事实上并不完全这样。因此，怎样改写原方程使得迭代过程收敛，怎样选择初值x_0，使迭代次数少、精确度高，便引起许多人的兴趣，出现了许多的迭代办法。比如，著名的牛顿法便是常用的方法之一。它的特点是把方程$f(x)=0$改写成下列形式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

其中，$f'(x)$是$f(x)$的一阶导数。这种方法的收敛速度要比普通迭代法快一些。

迭代法还可以用来求线性代数方程组的解。求方程组的近似解也要选择适当的迭代公式，使得收敛速度快，近似误差小。

在线性代数方程组的解法中，常用的有塞德尔迭代法、共轭斜量法、超松弛迭代法等等。此外，一些比较古老的普通消去法，如高斯法、追赶法等等，在利用电子计算机的条件下也得到广泛的应用。这些方法这里不作介绍，有兴趣的读者可

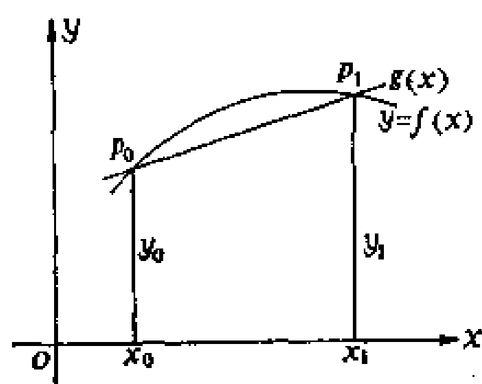
参阅有关计算数学的资料。

（四）

在计算方法中，数值逼近也是常用的基本方法之一。所谓逼近就是近似代替，也就是用简单的函数 $g(x)$ 去近似代替比较复杂的函数 $f(x)$，或者代替不能用解析表达式表示的函数。

举例来说，在实验中我们观测到某种物体的长度和温度有一定的函数关系，当温度是0°C的时候，长度是 l_1，10°C的时候是 l_2，20°C 的时候是 l_3，那么在 0°C 到 20°C 之间的任一温度的时候，物体的长度是多少呢？如果一点一点去测量是很麻烦的，因此，可以设法用一个函数 $g(x)$ 去近似代替上述函数关系。这样就可以通过求任意一点上函数 $g(x)$ 的值去近似代替所求点上原函数的值。这里函数 $g(x)$ 一般是简单的函数，常常用多项式函数或者有理函数表示。

数值逼近的基本方法是插值法。初等数学里的三角函数表、对数表有一项修正值，它就是根据插值法制成的。一般地，已知某个函数 $y=f(x)$ 在 x_0, x_1 两点的函数值是 y_1 和 y_2，而且区间 (x_0, x_1) 比较小，我们可以用直线来近似代替曲线 $f(x)$。



如左图所示，直线 P_0P_1 的方程是：

$$\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{x-x_0}{x_1-x_0},$$

就是

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)。$$

这样，我们可以取

$$g(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

作为近似代替 $f(x)$ 的函数，叫做插值函数，这里 x_0，x_1 是已知数。这种插值的办法叫做线性插值法。

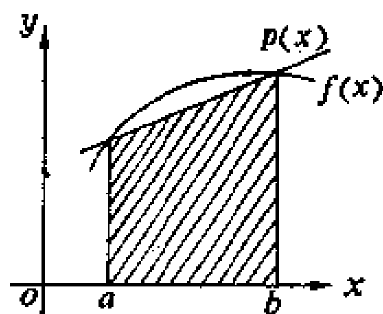
如果已知函数 $f(x)$ 在三个点 x_0，x_1，x_2 上的函数值，可以利用二次插值(或叫做抛物插值)，也就是在区间上，用抛物线来近似代替函数 $f(x)$。

这样类推下去，已知函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个点上的函数值，就可以作 n 次插值。常用的插值法有很多种，可根据情况选用。

(五)

在遇到求函数的微分和积分问题的时候，如何利用简单的函数去近似代替所给的函数 $f(x)$，以便容易求导和求积分也是计算方法的一个主要内容。这个时候，可以利用插值函数来代替已知的函数 $f(x)$。

在数值积分中常用的方法有梯形公式等。举例来说，如右图所示，要求函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分。最简单的是用梯形面积来代替曲边梯形的面积。就是



$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]。$$

（六）

微分方程的数值解法也是近似解法。常微分方程的数值解法有欧勒法、预测—校正法等。偏微分方程的初值问题或边值问题，目前常用的是有限差分法、有限元素法等。

有限差分法的基本思想是用离散的，只含有限个未知数的差分方程去代替连续变量的微分方程和定解条件，求出差分方程的解作为所求偏微分方程的近似解。

有限元素法是近代才发展起来的，它是以变分原理和剖分插值作为基础的方法。在解决椭圆型方程边值问题上得到广泛的应用。目前，有许多人正在研究用有限元素法来解双曲型和抛物型的方程。

计算数学的内容十分丰富，近年来，计算数学和其他学科相结合，产生了许多新的分支，如，计算力学、计算地震学、计算物理、计算化学、计算生物学等，随着科学技术的发展，计算数学正在发挥越来越大的作用。

二十二　程序设计

计算数学的一个分支

(一)

前面已经讲过计算数学包括两大部分，其中的程序设计由于计算机科学的发展，已经促使这部分内容发展成为一个独立的分支。

什么叫做程序设计呢？这里首先要简单地谈一谈电子数字计算机是怎样解决一个数学计算问题的。用电子计算机解决一个科学计算问题，首先要把问题数学化，也就是先要建立数学模型，所谓数学模型就是数学公式或者方程。其次要考虑用什么方法去解这个数学问题。然后再研究如何把它变成计算机能够执行的各个计算步骤。我们把每一个步骤叫做一条指令，一系列的指令组成了解决这个问题的程序，计算机就按照这个程序自动地进行工作。我们把以上的整个过程叫做程序设计。

(二)

程序设计可以说是为了利用电子数字计算机自动解算问题而建立的一门数学分支。因此，要了解程序设计所含的内

容，还必须先知道一般电子计算机的基本构成。

一般电子计算机都包括五个部分，这五个部分叫做计算机的硬件。这五个部分是：

输入设备：用来输入指令或者数据，并且把它存放在存储器内。

存储器：用来存放指令或者数据。它的构造象一所楼房，有许多“房间”，每一个“房间”叫做一个单元；每一个单元都有一个编号，叫做地址。

控制器：用来控制程序的运行。可以从存储器内逐条取出指令，并且按照顺序执行。

计算器：进行运算的装置，由几个累加寄存器组成。

输出设备：把所求的结果通过打印机或者穿孔机输出。

了解了电子计算机的基本构造和它们的功能，再了解程序设计就比较容易了。

关于程序设计的内容

（一）

电子计算机实际上包括两大系统：一个是刚才讲过的硬件，它是计算机的物理装置，或者叫做机器的基本构造；一个是软件，也叫做程序系统，它是提高计算机使用效率、扩大计算机功能的程序总称，软件包括编译程序、各种服务性程序、诊断程序、标准程序库、操作系统等等。

软件这个词是1959年开始使用的，主要是用来和硬件相对区分计算机的系统。从数学角度来说，要把一个数据通过

计算机自动解算出来，不但要有硬件，而且还要编程序，这就是程序设计。有人曾经打过一个比方，就象表演钢琴协奏曲一样，不但要有钢琴本身，而且还要有乐谱；硬件就是钢琴，程序设计就是乐谱。

程序设计的内容就包括编制计算机自动解算问题过程的整个程序。

（二）

如果要计算两个数 a、b 的和的值，这个数学模型是比较简单的，就是

$$a+b=c。$$

它的运算过程也很简单：

第一，输入数据 a、b；

第二，由存储器内分别取出 a 和 b，并且送到运算器内；

第三，进行加法运算 $a+b=c$；

第四，把结果 c 的值打印出来。

这就是计算 $a+b$ 的程序。但是电子计算机并不认识这些语言，这样计算机就要有它所认识的专用语言，也就是机器语言、汇编语言和算法语言。

机器语言是最早出现的计算机语言，它是用二进制的数码 0 和 1 来表示的。每一条指令都可以用若干位二进制数来表示，不同的计算机有不同的规定。举例来说，国产 DJS-130 机规定每一条指令用 16 位二进制数码来表示，每一位上的 0 和 1 都代表一定的意义。有的数码代表操作命令，有的代表存储单元的地址等等。

机器语言写的程序，优点是计算机可以直接执行，不足的地方是写起来比较繁琐又不容易看懂。因此，人们创造了用符号来表示指令的方法，叫做汇编语言，或者叫做符号语言。如国产 DJS-130 机所用的汇编语言是用 LDA 表示取数操作，用 ADD 表示加法运算等等。

汇编语言虽然比较容易书写和阅读，但是需要熟悉机器的一套符号系统，而且不同的机器符号也不相同，没有一般性。这样，它只适用于专业程序人员，其他人员用起来困难比较大。这样，人们又研究创制了一种高级语言，叫做算法语言。算法语言的特点是比较接近于自然语言，尤其是和数学语言很类似；它既符合人们的习惯，便于阅读、书写和记忆，同时又不受机器的限制，具有通用性。目前，算法语言的种类很多，每种算法语言都规定有一套基本词法和基本语言，只要严格按照规定去做，就可以编写出正确的程序。

（三）

用算法语言编制的程序叫做源程序，这种源程序计算机不能直接执行，它需要经过“翻译”变成机器语言才行。翻译工作的程序叫做编译程序或解释程序。

编译程序一般都存放在计算机的存储器内。

对于一些常用的初等函数、数制转换工作（如十进制翻译成二进制）、典型的计算方法、标准化的计算问题等等，事先编好程序，汇集起来存放在计算机的外存储器里，这样就构成一个程序库。当一个数据需要电子计算机解算的时候，需要用到那一个程序库里的内容，就通过解题程序调来使用。

操作系统是由许多执行控制和管理工作的子程序组成的大型程序系统。

由于电子计算机的使用越来越广泛越普及，它对程序设计要求更高了，这样，就使程序设计的研究更加深入和发展。

结束语

在这本书里，我们把数学分成二十二分支学科作了介绍，但是还没有把现代数学的所有分支都包括进去。现在所列的各个分支并不都是并列的关系，把它们都按并列关系基本上独立成章来介绍，只是为了便于读者根据需要任意选读。关于数学究竟有多少分支，说实话，我们也限于水平，作不出科学的断语。各个分支之间的联系，限于篇幅也没有详细叙述。

有些新兴的数学分支，它们的理论和方法正在逐步严密和完善，它们的应用初露锋芒，本书也还没有提到。模糊数学就是一个例子。模糊数学是建立在模糊集合基础上的数学模型。在日常生活中，经常会遇到许多模糊的概念。比如青年和成年、暖和和不凉、高和矮等，就是一对对既有区别又无明确界线的概念。这些集合的边缘模糊不清，所以叫做模糊数学。人们可以凭经验识别这些概念，怎样用数学方法作定量的分析呢？比如说论身高的"高个子"这个概念来说，假定身高1.8米算是高个子，那么1.79米算不算高个子，身高1.78米的个子也不能算作矮个子吧？看来很不容易讲清楚。采用模糊数学的方法，就能够得出比较切合实际的结论。现在模

糊数学的概念已经渗入到其他数学部分中去，有的人在研究模糊拓扑，有的人在研究模糊群论、模糊概率等等。模糊数学在自动控制、模式识别、信息检索、心理学、医学和生物学等方面已经大显身手。预期这个年轻的数学分支将会结出丰硕的科学果实。

近十多年来，数学更得到广泛应用，就连被认为是高度抽象的数学分支学科，如抽象代数、泛函分析、拓扑学等，也在控制工程、通讯技术里得到应用。特别是由于电子计算机以及各种精密仪表提供的脉冲信息，对工程系统的描述从连续时间转向离散时间，那些古典数学如数论等的实用价值也愈来愈大。比如关于炼油厂的设计，目前只需要对少量石油进行分析，根据分析数据就可以设计出一个现代化的炼油厂，这就是最优化理论和相似原理的具体应用。又比如新产生的突变理论，也是运用数学工具来描述象灾难性的或突如其来的骤变现象的，它的范围包括胚胎变异、桥梁断裂、神经错乱、甚至股票市场崩溃等等。运用数学这个工具，不仅能刻划力学、物理学的运动规律，而且能够揭示化学、生物体内发生的极其复杂的微观规律。

由于电子计算机的出现，使数学的研究方法也发生了变化，它可以通过大量的计算，证明那些从概念上看来应当得出某些结果的数学难题，也可以通过计算一个数学问题得出应有的结果，然后用传统的方法从理论上加以证明。电子计算机将使数学家从数学定理的证明和浩繁的计算工作中解脱出来，把主要精力更多地用到创造性的工作中去，使科学技术迈

向新的水平。

总之，数学是重要的，它的分支是众多的，如果读者看过本书某一部分后，可以基本上对它的研究对象和内容、基本思想和方法、它的起源和现状等有所了解，这就算是达到我们编写这本小册子的目的了。

后　记

在酝酿编写本书的时候，我们曾经就数学的分支和内容进行了讨论，由于近代数学分支繁多、内容丰富，而且尚在日益发展，要全面地简介和归纳分类，我们觉得这是难于完成的。特别是本书要面向青年、中学生和具有中等文化水平的职工干部，更深感难以胜任。

但是为了满足广大青年、中学生等读者的求知欲望，在中国青年出版社的大力支持下，我们经过反复的、详细的讨论，还是拟出了一个编写提纲，列出了准备介绍的数学主要分支，然后分工编写。

全书除绪论、结束语外，介绍分支的共二十二章，其中：一、二、三这三章是米道生同志编写的；八、九、十、十六、十七这五章是陈天然同志编写的；十八章是李建才同志编写的；四、十一这两章是周春荔同志编写的；二十、二十一、二十二这三章是饶光宗同志编写的；五、六、七、十二、十三、十四、十五、十九这八章是胡杞同志编写的。

本书原稿送审过程中，承蒙中国青年出版社的编辑同志进行了修订，使本书增色不少，我们谨向他们表示衷心的感谢。

我们的编写工作，只是初步尝试，缺点和错误是难免的，恳请广大读者批评、指正。

米道生　陈天然　李建才

周春荔　饶芃宗　胡　杞

1982年四月